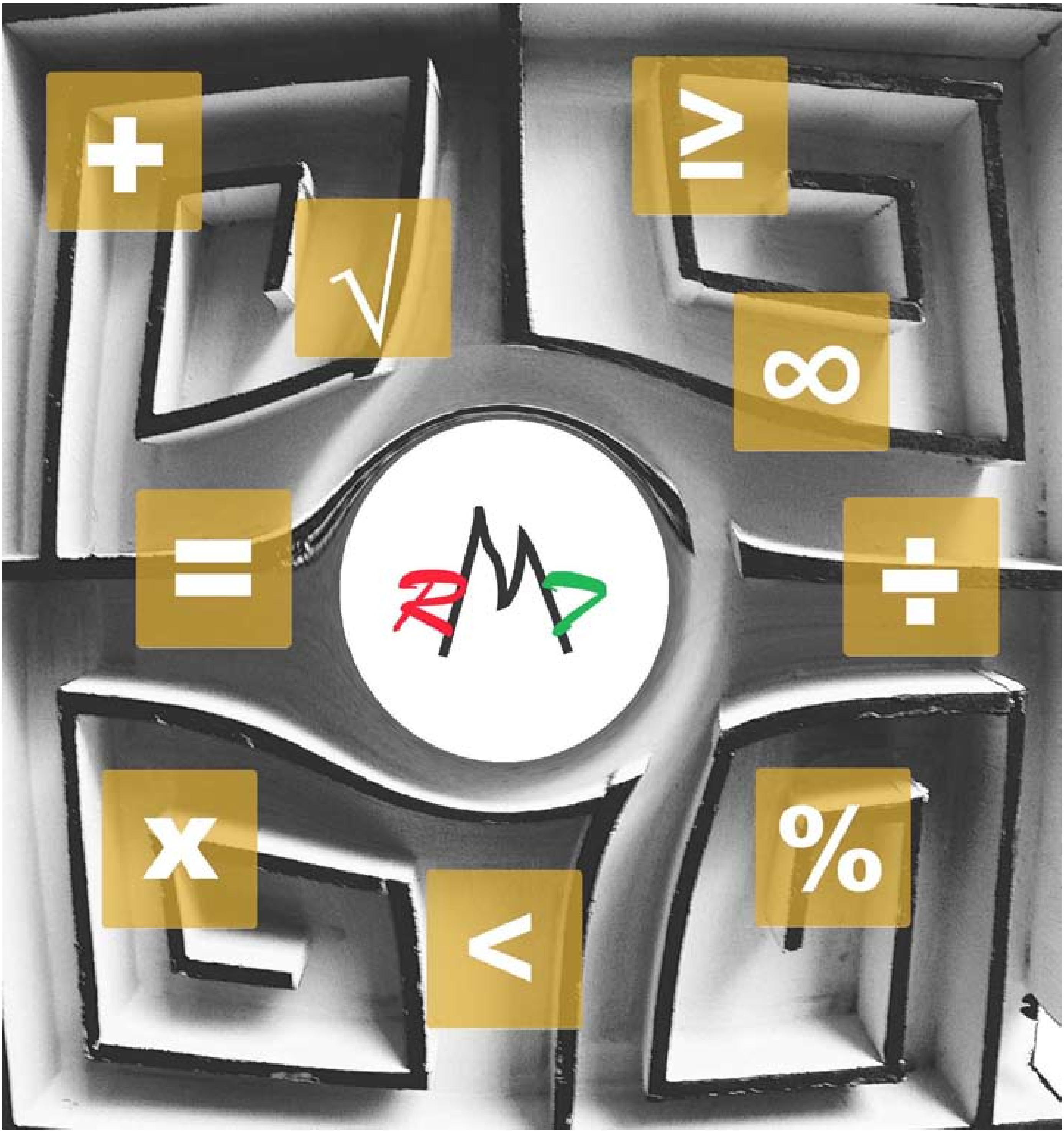
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 7, octobre / ottobre 2017



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 7, octobre 2017/ Numero 7, ottobre 2017

ÉDITORIAL : ALARME GÉOMÉTRIE

Lucia Grugnetti

Les résultats, dans l'ensemble décevants, des problèmes de géométrie proposés aux catégories « des grands » de nos épreuves du RMT nous rappellent des préoccupations déjà bien présentes dans le passé chez ceux qui s'occupent de didactique des mathématiques. On a l'impression que les voies de la pratique didactique sont substantiellement de deux types. D'un côté l'ancienne voie du « notionisme » encore suivie aujourd'hui dans l'idée de modeler des élèves surtout capables « de gérer » des formules et qui ne stimule donc pas « la pensée constructive, critique et déductive » ; de l'autre, la voie motivante et opérationnelle où l'on s'engage vers une géométrie soutenue par des constructions et manipulations, certainement à promouvoir, mais qui reste bancale si l'on ne trouve pas la manière de conduire l'élève à se détacher d'une réalité particulière pour arriver à entrevoir les contenus « généralisables ».
Déjà R. Charnay et M. Mante (1995[1]), soulignent que « L'élève vit dans un monde d'objets matériel, réels. Il transpose naturellement ses conceptions aux objets géométriques sur lesquels on lui propose de travailler. Il mobilise alors des connaissances de ce que nous avons appelé « la problématique pratique », ce qui est un obstacle à l'appropriation de la problématique de la géométrie. Il est nécessaire de négocier avec l'élève ce changement de problématique ».
Nous pensons que pour négocier le changement évoqué, il est essentiel de mettre l'élève dans des conditions favorables à affronter un tel passage. C'est seulement ainsi que la géométrie pourra assumer les caractéristiques d'une forme de pensée ouverte à la généralisation.

Ce n'est certes pas banal d'organiser ces « conditions favorables », mais un examen systématique des copies rendues par les classes et une analyse approfondie des démarches de résolution nous ouvrent des perspectives bien étayées. Reprendre nos problèmes en classe pour mettre les élèves en situation de recherche puis organiser des discussions pour comparer les solutions de chacun, pourrait ouvrir la voie vers les aspects déductifs qui conduisent aux propriétés générales.

Dans ce sens, nos problèmes se prêtent bien aux démarches « inverses », c'est-à-dire aux situations problématique qui ne se résolvent pas par l'application directe de formules, mais qui nécessitent le recours à une réciprocité des raisonnements, ou encore des situations où une résolution faisant appel à des mesurages conduit fatalement à des résultats différents, jusqu'à ce que les élèves se demandent « pourquoi obtenons-nous des résultats différents ? ».
Naît ainsi, de manière « spontanée », un conflit cognitif qui nécessite, pour son dépassement, « de se détacher » des mesures pour trouver un cheminement partagé et dont la validité est certifiée.

On trouve facilement des problèmes répondant à ces finalités dans les domaines « géométrie plane » et « géométrie de l'espace » de la Banque de problèmes du RMT. Pour certains d'entre eux les résultats obtenus sont déjà bien décrits avec des analyses de difficultés et d'obstacles, accompagnés encore « d'indications didactiques » fort utiles.

Si nos problèmes, avec leurs résultats issus de très nombreuses classes, peuvent être considérés comme une sorte de thermomètre des apprentissages en géométrie pour des élèves, en particulier des catégories les plus élevées, alors notre crainte est que la géométrie ne devienne, dans les pratiques de classe, un terrain de moins en moins cultivé.

[1] Charnay, R., Mante, M. : 1995, 'Préparation à l'épreuve des mathématiques du concours de professeur des écoles', Tome I, p.273, Hatier, Paris.

EDITORIALE: ALLARME GEOMETRIA

Lucia Grugnetti

I risultati nel complesso deludenti nelle prove del RMT riguardanti i problemi a contenuto geometrico, in particolare per quelli delle categorie più alte, ripropongono preoccupazioni già ben presenti in passato in coloro che si occupano di didattica della matematica. Si ha l'impressione che le vie scelte nella pratica didattica siano sostanzialmente di due tipi. Da un lato la via ancora oggi perseguita che si muove sulla vecchia strada del nozionismo, preoccupata soprattutto di sfornare allievi capaci di "gestire" formule e che quindi non stimola "il pensiero costruttivo, critico e deduttivo" e dall'altro, la via motivante e operativa di una geometria per esempio manipolativa, certamente da perseguire, ma che rimane monca laddove non si trovi il modo di portare l'allievo a svincolarsi da una particolare realtà per arrivare ad intravedere un ambito "generale".

Già in R. Charnay e M. Mante (1995[2]), si sottolinea che "l'allievo vive in un mondo di oggetti materiali, reali. Egli traspone in modo naturale le sue concezioni agli oggetti geometrici sui quali gli si chiede di lavorare. Mobilizza allora le conoscenze relative a ciò che abbiamo chiamato *la problematica pratica* e questo costituisce un ostacolo all'appropriazione della problematica geometrica. E' necessario negoziare con l'allievo questo cambiamento di problematica".

Pensiamo che un modo per negoziare il cambiamento evocato sia mettere l'allievo nelle condizioni favorevoli a scontrarsi con la necessità di un tale passaggio. Solo così la geometria potrà assumere le caratteristiche di una forma di pensiero aperta alla generalizzazione.

Non è certamente banale organizzare queste "condizioni favorevoli", ma un'analisi approfondita di nostri problemi da riprendere in classe per mettere gli allievi in situazioni di ricerca e la successiva discussione per mettere a confronto le soluzioni di ciascuno, potrebbe aprire una strada verso aspetti deduttivi che portino a considerazioni generali.

In questo senso si prestano bene, in particolare, i problemi "inversi", problemi cioè che non si risolvono con l'applicazione diretta di formule, ma che necessitano del ricorso ad una sorta di reciprocità dei ragionamenti, o ancora i problemi che evidenzino come una risoluzione con misure possa fatalmente differire tra i differenti allievi, fino alla domanda "perché otteniamo risultati diversi?".

Nasce così, in maniera "spontanea", un conflitto cognitivo che necessita, per il suo superamento, di riuscire a "sganciarsi" dalle misure e di trovare una via comune in qualche modo certificata.

I problemi atti a tale scopo sono facilmente reperibili negli ambiti dal titolo "geometria piana" e "geometria solida" della Banca di problemi del RMT. Di alcuni di essi figurano peraltro schede piuttosto dettagliate con analisi di difficoltà e ostacoli e con utili "indicazioni didattiche".

Se i nostri problemi, con i loro risultati provenienti da innumerevoli classi, possono essere considerati come una sorta di termometro dell'apprendimento della geometria, in particolare per allievi delle categorie più alte, allora il nostro timore è che la geometria, nell'attività di classe, stia diventando un campo sempre meno coltivato.

[2] Charnay, R., Mante, M. : 1995, 'Préparation à l'épreuve des mathématiques du concours de professeur des écoles'. Tome I, p.273, Hatier, Paris.

Presentazione del numero

Questo numero 7 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene: tre articoli, due dei quali sono relativi alle conferenze plenarie tenute al convegno di Le Locle, mentre il terzo riguarda alcune riflessioni su un problema del 23° RMT, una nota sul RMT proposto a un gruppo di genitori e la rubrica con due studi di approfondimento di schede della banca di problemi.

- Nell'articolo ***La risoluzione di problemi, un motore per sviluppare la creatività***, **Michel Criton** ci ricorda che l'attività di risoluzione di problemi o di enigmi logico-matematici esiste dalla più lontana antichità, indipendentemente da qualunque sistema scolastico. Questo tipo di attività era generalmente riservato a una minoranza colta. Questi problemi, però, oggi fanno parte di una "cultura logico-matematica comune". L'autore si propone, in particolare, di mostrare che tale tipo di "enigmi", che siano classici o no, possono essere reinvestiti a scuola per dinamizzare la motivazione degli allievi, stimolare la loro creatività e la loro inventività.

- **François Jaquet**, nel suo articolo dal titolo ***Condizioni per la risoluzione di problemi***, sottolinea come l'esame degli elaborati degli allievi ci fornisca indici preziosi sulle cause della buona riuscita o dell'insuccesso nell'attività di risoluzione di problemi e sulle sue potenzialità per l'elaborazione di una relazione sana tra l'individuo e la matematica. Tale analisi, che non si limita alle risposte date e alle spiegazioni che le accompagnano, apre la strada a riflessioni sulle condizioni necessarie perché l'attività di risoluzione di problemi possa essere proseguita al di là della gara, in un lavoro in classe, a tutti i livelli e al di là della stessa scolarità.

- **Pauline Lambrecht**, in ***Gli impliciti nella risoluzione di problemi. L'esempio degli Extra-terrestri***, analizza un problema della prima prova della 23esima edizione del RMT alla luce delle risposte degli allievi e tale analisi conduce a mettere in discussione l'analisi del compito e l'attribuzione dei punteggi elaborati a priori.

- **M. Agostina Satta e Rosanna Sanna** in ***I genitori tornano sui banchi di scuola***, presentano il ricco resoconto di una gara tipo RMT, ma… per i genitori, nell'ambito del progetto "Matematicainsieme", messo a punto nel corso dell'anno scolastico 2016/2017.

- Nella rubrica APPROFONDIMENTI, che ospita le note di approfondimento di schede della banca di problemi, **Michel Henry e Angela Rizza**, coordinatori del gruppo di lavoro *Funzioni*, propongono uno studio a partire dal problema *Tempo di vendemmia* elaborato nell'ambito dei lavori del gruppo che coordinano, mentre **Il Gruppo Zeroallazero e Lucia Doretti**, presentano uno studio a partire da due problemi sulle circonferenze proposti in due edizioni diverse del RMT.

Présentation du numéro

Ce numéro 7 de *La Gazette de Transalpie* contient trois premiers articles : deux relatifs aux conférences plénières prononcées lors de la rencontre du Locle et un troisième qui concerne quelques réflexions sur un problème du 23° RMT ; un compte rendu sur le RMT proposé à un groupe de parents d'élèves et la rubrique des approfondissements, avec deux études prolongeant des fiches de la banque de problèmes.

- Dans l'article ***La résolution de problèmes, un moteur pour développer la créativité***, **Michel Criton** nous rappelle que l'activité de résolution de problèmes ou d'énigmes logico-mathématiques existe depuis la plus haute antiquité, indépendamment de tout système scolaire. Elle était généralement réservée à une minorité lettrée. Mais ces problèmes font aujourd'hui partie d'une « culture logico-mathématique commune ». Il nous propose de montrer que ce type d'« énigmes », qu'elles soient classiques ou non, peuvent être réinvesties à l'école pour : dynamiser la motivation des enfants, stimuler leur créativité et leur inventivité.

- **François Jaquet**, dans son article ***Conditions pour la résolution de problèmes***, souligne que l'examen de copies rendues par les élèves nous donne des indices précieux sur les causes de la réussite, ou de l'échec, dans l'activité de résolution de problèmes et sur ses potentialités pour l'élaboration d'une relation saine entre l'individu et les mathématiques. L'observation des copies ne se limite pas aux réponses données et aux explications qui les accompagnent ; elle ouvre le champ à des réflexions sur les conditions nécessaires pour que l'activité de résolution de problèmes puisse se poursuivre au-delà de l'épreuve du RMT, dans le travail en classe, à tous les niveaux et au-delà même de la scolarité.

- **Pauline Lambrecht**, dans ***Les implicites dans la résolution de problèmes L'exemple des Extraterrestres***, examine un problème de la première épreuve du 23^{e} RMT à la lumière des réponses des élèves. Cet examen aboutit à la remise en question de certains passages de l'analyse a priori de la tâche et de l'attribution des points.

- **M. Agostina Satta et Rosanna Sanna** dans ***Les parents retournent sur les bancs d'école***, présentent un riche compte rendu d'une confrontation du genre RMT, mais … pour des parents d'élèves, dans le cadre d'un projet « Mathématiques ensemble » initié dans le courant de l'année scolaire 2016/2017.

- Dans la rubrique, **Les études**, qui accueille les développements de certaines fiches de la banque de problèmes, **Michel Henry** et **Angela Rizza**, proposent pour ce numéro une étude du problème *Le temps des vendanges* élaborée par le groupe de travail *Fonctions* qu'ils coordonnent. De son côté, **Le Groupe Zeroallazero et Lucia Doretti**, présentent une étude concernant deux problèmes à propos de cercles concentriques proposés dans deux différentes éditions du RMT.

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES, UN MOTEUR POUR DÉVELOPPER LA CRÉATIVITÉ[1]

Michel Criton[2]

La place des mathématiques dans les activités humaines

La littérature, la peinture, la musique, les disciplines artistiques évoquent diverses activités : la lecture, la fréquentation d'expositions ou de musées, de concerts ou de spectacles de théâtre, etc…, et, accessoirement, de disciplines pratiquées ou étudiées à l'école.
Qu'en est-il pour les mathématiques ?
Si les disciplines littéraires et artistiques sont bien présentes dans la société, les magazines, les médias, les disciplines scientifiques le sont beaucoup moins avec un decrescendo qui va des sciences dites « naturelles » aux mathématiques en passant par les sciences physiques.
Les mathématiques occupent donc une place singulière parmi l'ensemble des disciplines et c'est l'une des causes de leur image négative dans le « grand public ».
Mais il existe vraisemblablement d'autres raisons.

L'étude des mathématiques a longtemps été réservée à une « élite » lettrée, le commun des mortels se contentant de savoir effectuer des additions et des soustractions, voire des multiplications et certains artisans connaissant quelques « règles » de géométrie nécessaires à leur profession.
Depuis quelques décennies, tous les enfants et les adolescents doivent « absorber » des contenus mathématiques jugés indispensables pour devenir un citoyen « éclairé ».
Mais les méthodes d'enseignement ont-elles beaucoup changé ?
Une leçon de mathématiques se déroule généralement en trois phases :
• activité préparatoire
• cours
• exercices d'application.
La résolution de problèmes est rarement présente en classe.
Ce qui est présenté comme « problème » est trop souvent constitué d'une suite de questions « balisées » qui relèvent davantage des « exercices ».

Exercices ou problèmes ?

Il existe en effet une différence entre un exercice et un problème.
Un dictionnaire nous indique qu'un exercice est « une activité structurée, adaptée, qui permet de développer les capacités de quelqu'un dans un domaine ».
Une des définitions du mot « problème » est la suivante : « question à résoudre dans un domaine quelconque, qui se présente avec un certain nombre de difficultés, d'obstacles à surmonter ».
Pour résoudre un exercice, on connaît à l'avance la ou les méthodes à appliquer.
Pour résoudre un problème, on doit trouver (parfois inventer) la méthode à utiliser, comme dans la vie ...
La notion « d'obstacle à surmonter » est importante. Il faut que les enfants sachent qu'on ne connaît pas tout, que certaines questions, même simples d'apparence, sont non résolues, et qu'il est normal de parfois « sécher » sur un problème.
Il nous est arrivé dans des ateliers proposés par la Fédération Française des Jeux Mathématiques, de voir de jeunes élèves souvent excellemment notés en mathématiques, se mettre à pleurer parce qu'ils « séchaient » sur une énigme (pourtant à leur portée) et qu'ils n'avaient jamais été confrontés à une telle situation au cours de leur scolarité. Ils n'avaient jamais eu à résoudre autre chose que des exercices d'application.
Il nous est aussi arrivé de voir des élèves jugés scolairement plus « moyens » par leur professeur faire preuve d'astuce et d'inventivité pour résoudre les mêmes énigmes.

---

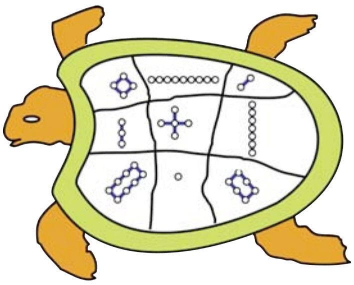
[1] Cet article reprend la conférence prononcée par l'auteur lors de l'ouverture de la vingtième rencontre de l'ARMT, au Locle, le 14 octobre 2016

[2] Fédération Française des Jeux Mathématiques

La tradition des jeux mathématiques

Si les mathématiques sont peu présentes dans la vie sociale, les médias, il existe néanmoins une tradition très ancienne, celle des « jeux mathématiques et logiques » qui sont diffusés depuis la plus haute antiquité et qui s'adressent à tous les esprits curieux.

Le premier exemple que nous citerons est celui du **Lo Shu**, diagramme né en Chine il y a plus de 20 siècles.
Nous ne nous intéresserons ici qu'à son aspect de « bel objet mathématique » et non aux considérations ésotériques qu'il a pu susciter.



Dans les ateliers animés par la FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques, association créée en 1987), nous proposons aux enfants (… et aux adultes) de reconstruire ce carré magique à partir d'un matériel simple : une fiche plastifiée et des pions numérotés.

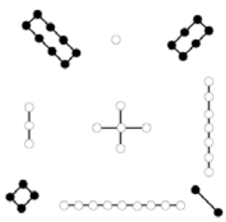
L'intérêt de ce matériel comparativement au papier et au crayon est double. Il permet des essais nombreux que l'on n'a pas besoin de rayer ou d'effacer. Enfin, on peut suivre littéralement la pensée de la personne qui cherche à résoudre l'énigme en observant ses gestes.
Il est généralement nécessaire de demander à l'enfant ou à la personne : « quelle est la somme magique (somme des termes d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale) ?
Pour aider l'enfant, on peut lui proposer de calculer la somme des nombres de 1 à 9. Il est alors bienvenu de lui expliquer à l'aide de deux jeux de pions la « méthode du jeune Gauss » (méthode utilisée à l'âge de 10 ans par Gauss pour répondre à son instituteur qui demandait à la classe de calculer la somme des nombres de 1 à 100).

Il nous est arrivé en atelier de voir des enfants adopter spontanément la disposition ci-dessous, qui facilite grandement la résolution du problème !

La question qui vient ensuite est : « quel nombre faut-il placer au centre ? »
Certains enfants placent un nombre choisi au hasard. D'autres placent le 1 (plus rarement le 9). D'autres placent spontanément le 5 et, si on leur demande pourquoi, répondent « parce que c'est le nombre du milieu entre 1 et 9 ».
Bonne intuition …
Lorsque les enfants ont trouvé la somme magique (15), on peut leur demander d'écrire toutes les décompositions de 15 en somme de trois nombres distincts choisis dans l'ensemble {1 ; 2 ; …; 9}.

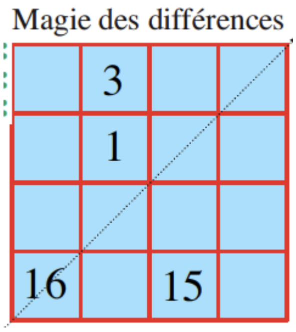
$1 + 5 + 9$; $2 + 6 + 7$
$1 + 6 + 8$; $3 + 4 + 8$
$2 + 4 + 9$; $3 + 5 + 7$
$2 + 5 + 8$; $4 + 5 + 6$.

On constate que seul le 5 apparaît quatre fois, que chaque nombre pair apparaît trois fois et chaque nombre impair autre que 5 deux fois seulement. On en déduit un placement quasi-automatique des nombres pour former le carré magique.
Lorsque les enfants ont trouvé la somme magique (15) et la valeur du nombre central (5), on peut également leur proposer un raisonnement basé sur la parité.
La somme magique 15 est impaire. Une somme de trois nombres entiers est impaire dans les deux cas suivants :
- les trois nombres sont impairs
- un nombre est impair et les deux autres sont pairs.



8	1	6
3	5	7
4	9	2

Voici une **autre énigme apparentée aux carrés magiques**
Nous avons imaginé cette énigme dans les années 1970 et l'avons proposée à Pierre Berloquin qui tenait la rubrique « Jeux et paradoxes » dans la revue Science & Vie.



Il s’agit de compléter le carré avec les nombres entiers de 1 à 16 de telle sorte que les trois différences en valeur absolue sur chaque ligne, chaque colonne et sur la diagonale fléchée, donnent toujours un total égal à 12.
Cette (difficile) énigme a deux solutions.

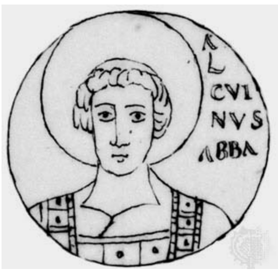
8	3	7	4
6	1	5	2
14	9	13	10
16	11	15	12

8	3	7	4
6	1	5	2
13	10	14	9
16	11	15	12

On peut amorcer un raisonnement en remarquant que les nombres situés aux extrémités d’une rangée (ligne, colonne ou diagonale) doivent être de même parité pour obtenir une somme des différences (en valeurs absolues) paire.

Un problème d’Alcuin d’York

Alcuin d’York (vers 730 - 804) a été le « Ministre de l’Education » de Charlemagne. On lui attribue un recueil de 53 problèmes (en latin) intitulé *Problèmes pour aiguiser l’esprit de la jeunesse*.



On trouve dans cette compilation des problèmes variés d’origines diverses (l’un des problèmes fait intervenir un chameau), dont le célèbre problème de traversée d’une rivière avec un loup, une chèvre et un panier de choux.
Voici un exemple devenu un classique :
Un père et ses trois fils
Un père, lorsqu'il mourut, laissa à ses trois fils 30 jarres, dont 10 étaient pleines d'huile, 10 à moitié pleines, et les 10 autres vides.
Partagez l'huile et les jarres de telle sorte que chacun des trois fils reçoive le même nombre de jarres et la même quantité d'huile.
La solution proposée par Alcuin est la suivante : on donne les dix jarres à moitié pleines à l’un des fils, et cinq jarres pleines et cinq jarres vides à chacun des deux autres.

Un problème numérique : le carré bègue
La genèse de ce problème remonte à une époque où ni les ordinateurs personnels ni même les calculatrices n’étaient répandus.

Le nombre 7744 est le carré d'un entier. Son écriture particulière dans le système décimal en fait un bel « objet » mathématique, même s'il ne s'agit pas d'une propriété intrinsèque du nombre mais d'une propriété liée à l'écriture dans une base de numération.
Existe-t-il d'autres carrés d'entiers présentant la même structure (à l'exception bien sûr des nombres se terminant par « 00 ») ?
Nous nous sommes posé cette question sans savoir s'il existait une solution.
Une première approche a consisté à examiner une « table des carrés ». Ces tables qui accompagnaient les élèves avant l'avènement des calculatrices, permettaient de faire des observations intéressantes.
L'utilisation d'un tableur peut les remplacer aujourd'hui.

n	n^2 (mod 100)	n	n^2 (mod 100)
1	01	49	01
2	04	48	04
3	09	47	09
4	16	46	16
5	25	45	25
6	36	44	36
7	49	43	49
8	64	42	64
9	81	41	81
10	00	40	00
11	21	39	21
12	44	38	44
13	69	37	69
14	96	36	96
15	25	35	25
16	56	34	56
17	89	33	89
18	24	32	24
19	61	31	61
20	00	30	00
21	41	29	41
22	84	28	84
23	29	27	29
24	76	26	76
25	25	25	25

On observe une symétrie remarquable des terminaisons des carrés. Celle-ci n'a rien de mystérieux. On peut l'expliquer simplement à l'aide de l'identité remarquable
$\mathbf{(50k \pm n)^2 = 2500k^2 \pm 100kn + n^2}$
On peut démontrer que les quatre derniers chiffres d'un carré de la forme *aabb* ne peuvent être que 2244, 3344, 6644, ou 7744, avec la périodicité suivante :

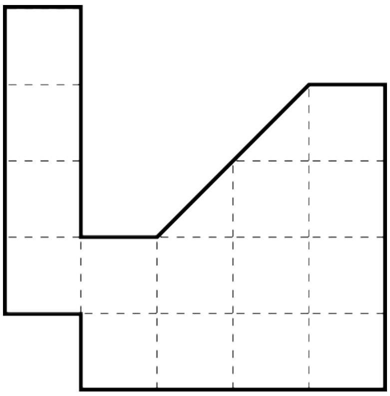
$(2500k \pm 88)^2$ se termine par 7744,
$(2500k \pm 238)^2$ se termine par 6644,
$(2500k \pm 688)^2$ se termine par 3344,
$(2500k \pm 838)^2$ se termine par 2244.

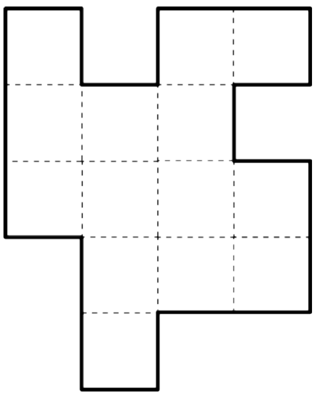
En poursuivant cette recherche, on observe qu'il n'existe aucune solution à 6 chiffres, ni à 8 chiffres, mais qu'il en existe une à 10 chiffres :
$\mathbf{74\,162^2 = 55\,00\,00\,22\,44}$
En existe-t-il d'autres ? Le problème est ouvert. Avis aux amateurs (des informaticiens ont fait des tests jusqu'à de très grands nombres).
Nota : Nous avons découvert plus de 20 ans après avoir eu l'idée de ce problème que dans les années 1930, quelqu'un avait proposé le même problème avec la même réponse dans la revue belge « Sphinx ». Moralité : restons modeste …

Des problèmes de découpage

Les problèmes de découpages sont très anciens. Au Xe siècle, le mathématicien persan Aboul Wafa (940 - 998), dans un ouvrage intitulé *Livre sur les constructions géométriques nécessaires à l'artisan*, explore les façons de découper *n* carrés pour former un seul grand carré.

La Fédération Française des Jeux Mathématiques propose régulièrement des problèmes de découpage. De nombreux « matheux » pensent et disent qu'il n'existe pas de méthode pour résoudre ce genre de problèmes. Ce n'est pas tout-à-fait exact.
Intéressons-nous aux découpages d'une figure en deux parties superposables (généralement à un retournement près, c'est-à-dire qu'il se peut que le retournement d'une des deux parties soit nécessaire pour assurer la superposition).

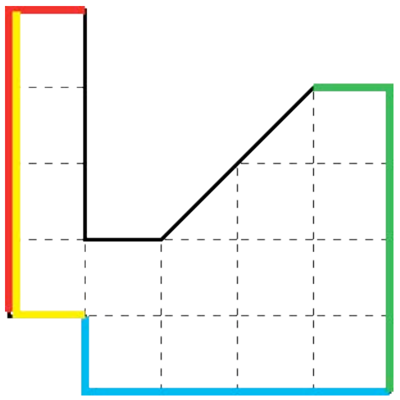




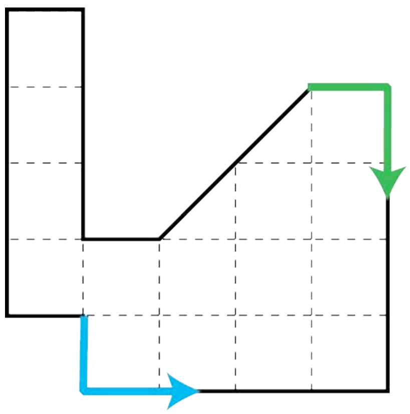
Dans tous les découpages en 2 parties superposables, on peut affirmer que :
- les bords des deux parties sont superposables, donc ils ont la même longueur ;
- le bord de chaque partie se décompose en un morceau de bord « extérieur » et un morceau de bord « intérieur » ;
- les deux parties ont une même longueur de bord extérieur et une même longueur de bord intérieur.

La méthode consiste donc à choisir deux points qui pourraient se correspondre et à suivre le contour simultanément à partir de ces deux points en ne rentrant à l'intérieur de la figure pour un des contours que si l'autre contour nous y oblige.

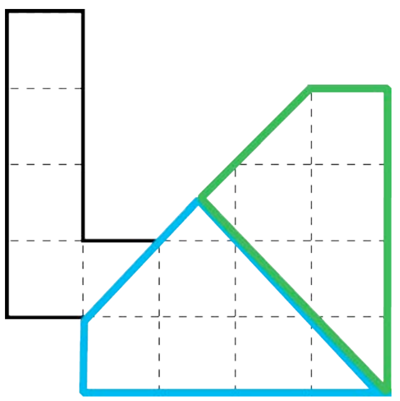
L'exercice est plus facile pour les personnes ambidextres …



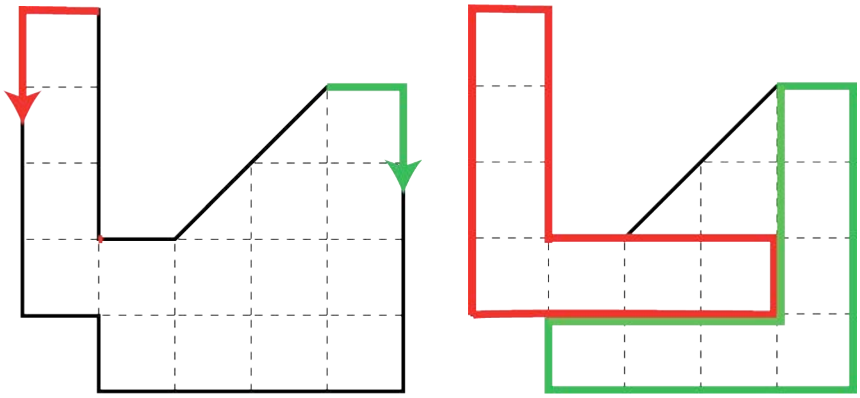
Plusieurs morceaux du contour se ressemblent. Il faut faire un choix …
Combien avons-nous de possibilités pour choisir 2 morceaux ? (Mais certains choix peuvent parfois être éliminés d'office, comme rouge et jaune sur cet exemple).
Essayons Bleu et vert



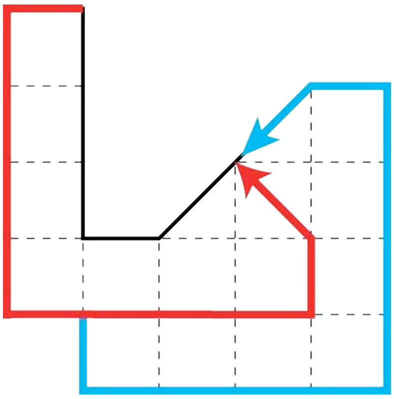
Bleu et vert conduisent bien à deux parties superposables, mais qui ne partagent pas TOUTE la figure …



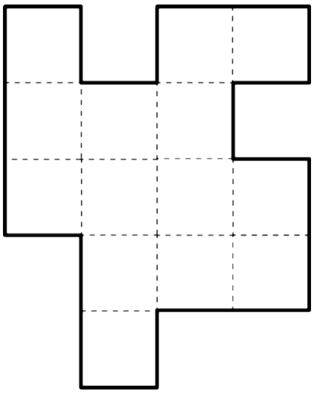
On aboutit également à un échec avec rouge et vert.



Mais rouge et bleu conduisent à une solution !

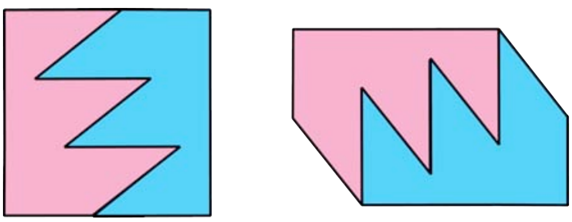


Nous laissons au lecteur le plaisir de chercher pour la figure suivante …



Un autre découpage

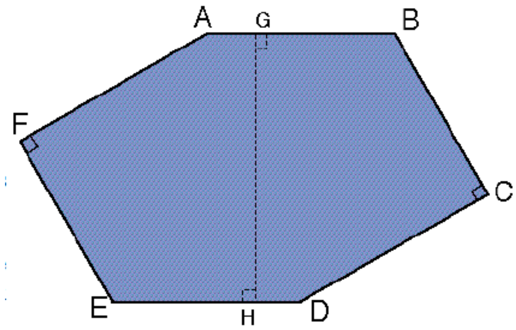
Nous avons trouvé ce beau découpage dans un recueil de jeux mathématiques.



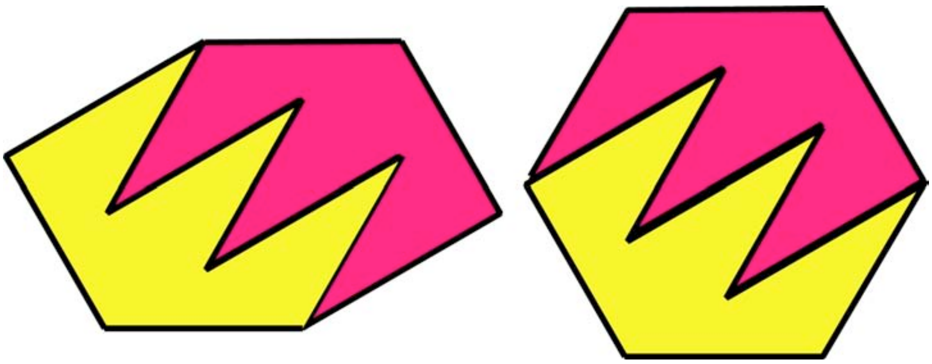
Il est plus facile de passer de l'hexagone au carré que l'inverse …

Questions annexes : peut-on modifier le nombre de zig-zags ?
Comment cela influe-t-il sur l'hexagone final ?

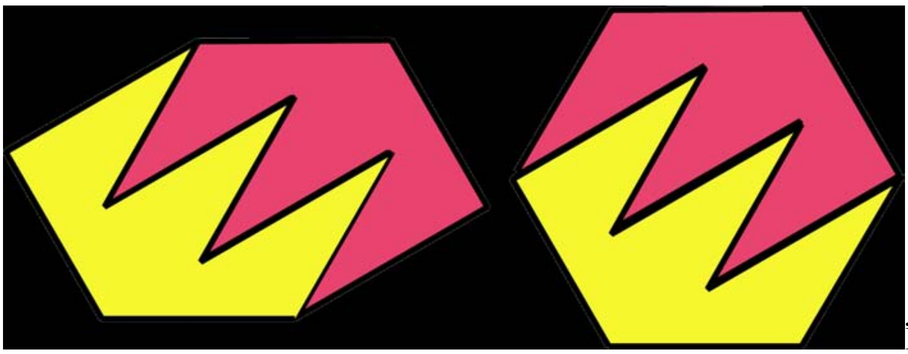
Ce problème nous a amené à nous demander si on pouvait créer un hexagone régulier avec ce type de découpage.



Dans cette figure, nous avons AF = CD = 20 cm ; GH = 25 cm ; AB = BC = DE = EF = $10\sqrt{3}$ cm.
On demande de découper cet hexagone (non régulier) en deux parties superposables de façon à pouvoir réassembler les deux morceaux et former un hexagone régulier.



Précisons que le problème a été conçu à l'envers (à partir de l'hexagone régulier).


Ï

LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI, UN MOTORE PER SVILUPPARE LA CREATIVITÀ[1]

Michel Criton[2]

Il posto della matematica nelle attività umane

La letteratura, la pittura, la musica, le discipline artistiche evocano diverse attività: la lettura, la frequentazione di esposizioni o di musei, di concerti o di rappresentazioni teatrali, ecc, e accessoriamente, discipline praticate o studiate a scuola.
E nel caso della matematica?

Se le discipline letterarie e artistiche sono ben presenti nella società, nei giornali, nei media, le discipline scientifiche lo sono molto meno con un decrescendo che va dalle scienze dette "naturali" alla matematica, passando per le scienze fisiche.
La matematica occupa un posto singolare tra l'insieme delle discipline e questa è una delle cause della sua immagine negativa per il "grande pubblico".
Esistono però verosimilmente altre ragioni.

Lo studio della matematica è stato per lungo tempo riservato a una "élite" colta; i comuni mortali si "accontentavano" di saper effettuare addizioni e sottrazioni o anche moltiplicazioni e certi artigiani conoscevano alcune "regole" di geometria necessarie alla loro professione.
Da qualche decennio, tutti i bambini e gli adolescenti devono "sorbire" contenuti matematici considerati come indispensabili a diventare un cittadino "illuminato".
Ma i metodi d'insegnamento sono molto cambiati?
Una lezione di matematica si svolge generalmente in tre fasi:

- attività preparatoria
- lezione
- esercizi di applicazione.

La risoluzione di problemi è raramente presente.
Ciò che è presentato come "problema" è troppo spesso costituito da una successione di domande "predeterminate" che lo fanno assomigliare ad un esercizio.

Esercizio o problema?

In effetti c'è una differenza fra un esercizio e un problema.
Un dizionario ci dice che un esercizio è "un'attività strutturata, adattata, che permette di sviluppare le capacità di qualcuno in un determinato ambito.
Una delle definizioni del termine "problema" è la seguente:
"questione da risolvere in un ambito qualunque, che si presenta con un certo numero di difficoltà, di ostacoli".
Per risolvere un esercizio, si conoscono in anticipo il metodo o i metodi da applicare.
Per risolvere un problema, è necessario trovare (talvolta inventare) il metodo da utilizzare, come nella vita...

La nozione di "ostacolo da superare" è importante. Bisogna che gli allievi sappiano che non si conosce tutto, che certe questioni, anche se semplici all'apparenza, restano non risolte, che è normale talvolta "piantarsi" su un problema.
Ci è capitato, in laboratori proposti dalla Fédération Française des Jeux Mathématiques, di vedere giovani allievi con ottimi voti in matematica, mettersi a piangere perché si bloccavano su un "enigma" (peraltro alla loro portata) e che non erano mai stati messi di fronte a tali situazioni nel corso della loro scolarità. Avevano sempre e solo risolto esercizi di applicazione.
Ci è anche capitato di vedere allievi giudicati a scuola "meno brillanti", dare prova di astuzia e di inventività per risolvere i medesimi "enigmi".

---

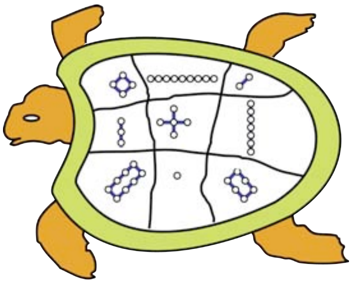
[1] Questo articolo riprende la conferenza dell'autore presentata nella giornata di apertura del ventesimo incontro dell'ARMT a Le Locle (Svizzera), il 14 ottobre 2016.

[2] Fédération Française des Jeux Mathématiques

La tradizione dei giochi matematici

Se la matematica è poco presente nella vita sociale e nei media, esiste comunque una tradizione molto antica, quella dei "giochi matematici e logici", che risalgono a tempi molto lontani e che sono indirizzati a tutte le menti curiose.

Il primo esempio che citiamo qui è quello detto **Lo Shu**, diagramma nato in Cina più di 20 secoli fa.
Ci interessiamo in questa sede solo al suo aspetto di "bell'oggetto matematico" e non a considerazioni di tipo esoterico che ha forse suscitato.



Nei laboratori animati dalla FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques, associazione creata nel 1987), proponiamo ai bambini (… e agli adulti) di ricostruire questo quadrato magico a partire da un materiale semplice: una scheda plastificata e dei gettoni numerati.

L'interesse di questo materiale rispetto a carta e penna è duplice. Da un lato perché permette di ricorrere a numerosi tentativi che non è necessario cancellare e, dall'altro, perché è anche possibile seguire effettivamente il pensiero della persona che cerca di risolvere l'enigma, osservando i suoi gesti.

In generale, è necessario chiedere al bambino o all'adulto: "qual è la somma magica (somma dei termini di una riga, di una colonna o di una diagonale)?"
Per aiutarlo, possiamo proporgli di calcolare la somma dei numeri da 1 a 9. Ed è bene approfittare di questa domanda per spiegargli, con l'aiuto di due gruppi di gettoni, il "metodo del giovane Gauss" (metodo da lui utilizzato quando aveva 10 anni per rispondere al maestro che chiedeva alla classe di calcolare la somma dei numeri da 1 a 100).

Ci è capitato di notare che alcuni bambini usavano spontaneamente la disposizione qui sotto che facilita notevolmente la risoluzione del problema!

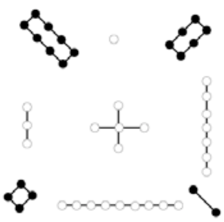
Segue la domanda "Quale numero mettere al centro?" Alcuni bambini fanno una scelta a caso. Altri mettono l'1 (più raramente il 9). Altri mettono spontaneamente il 5, se si chiede loro perché, rispondono "Perché è il numero di mezzo tra 1 e 9".
Buona intuizione…

Quando i bambini hanno trovato la somma magica (15), possiamo chiedere loro di scrivere tutte le scomposizioni di 15 in somma di tre numeri distinti scelti nell'insieme {1 ; 2 ; …. ; 9}.

$1 + 5 + 9$; $2 + 6 + 7$
$1 + 6 + 8$; $3 + 4 + 8$
$2 + 4 + 9$; $3 + 5 + 7$
$2 + 5 + 8$; $4 + 5 + 6$.

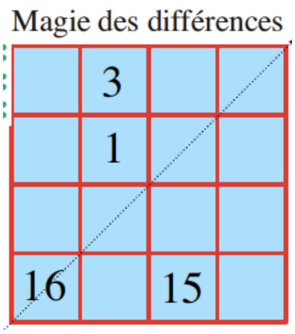
Si può osservare che solo il 5 appare quattro volte, che ogni numero pari appare tre volte e che ogni numero dispari, a parte il 5, appare solo due volte. Ne consegue una sistemazione quasi automatica dei numeri per formare il quadrato magico.

Quando i bambini hanno trovato la somma magica (15) e il valore del numero centrale (5), possiamo anche proporre loro un ragionamento basato sulla parità.
La somma magica (15) è dispari. Una somma di tre numeri interi è dispari nei due casi seguenti:
- i tre numeri sono dispari
- un numero è dispari e gli altri due sono pari.



8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ecco un **altro enigma imparentato con i quadrati magici**
Avevamo creato questo enigma negli anni '70 e lo abbiamo proposto a Pierre Berloquin che si occupava della rubrica «Jeux et paradoxes» della rivista Science & Vie.
Si tratta di completare il quadrato con i numeri interi da 1 a 16 in modo che le tre differenze in valore assoluto su ciascuna riga, ciascuna colonna e sulla diagonale con la freccia diano sempre un totale uguale a 12.



Questo enigma (difficile) ha due soluzioni.

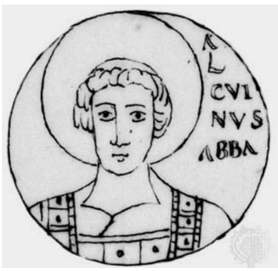
8	3	7	4
6	1	5	2
14	9	13	10
16	11	15	12

8	3	7	4
6	1	5	2
13	10	14	9
16	11	15	12

Possiamo iniziare il ragionamento osservando che i numeri situati alle estremità di una fila (riga, colonna o diagonale) devono essere o tutti pari o tutti dispari per ottenere una somma delle differenze (in valore assoluto) pari.

Un problema di Alcuino di York

Alcuino di York (verso il 730 - 804) è stato “Ministro dell’Educazione” di Carlomagno. Gli si attribuisce una raccolta (in latino) di 53 problemi intitolata *Proposizioni per affinare l’ingegno dei giovani*.



Vi si trovano problemi vari di diverse origini (uno di essi riguarda un cammello), fra i quali Il famoso problema del fiume da attraversare con un lupo, una pecora e un cesto di cavoli.

Ed ecco uno dei problemi di Alcuino (divenuto un classico):
Un padre e i suoi tre figli
Un padre morendo lasciò in eredità ai suoi tre figli 30 ampolle di vetro, dieci delle quali erano piene d'olio, altre dieci riempite a metà, le terze dieci vuote. Divida, chi può, olio e ampolle in modo che ciascuno dei tre figli ottenga la stessa quantità sia di vetro che di olio.

La soluzione proposta da Alcuino è la seguente:
Vengono date 10 ampolle riempite a metà a uno dei figli, cinque ampolle piene e cinque vuote a ciascuno degli altri due.

Un problema numerico: il quadrato balbuziente

La genesi di questo problema risale a un’epoca nella quale non erano diffusi né computer, né calcolatrici.
Il numero 7744 è il quadrato di un intero. La sua scrittura particolare nel sistema decimale ne fa un “bell’oggetto”. Esistono altri quadrati di numeri interi che presentino la medesima struttura (a parte ovviamente i numeri che finiscono con “00”)?

Ho posto questa domanda senza sapere se esistesse una soluzione.
Un primo approccio è consistito nell’analizzare una “tabella di quadrati”. Le tabelle alle quali ricorrevano gli allievi prima dell’avvento delle calcolatrici, permettevano di fare delle osservazioni interessanti.
Oggigiorno l’uso di un foglio elettronico può sostituire le tabelle.

n	n^2 (mod 100)	n	n^2 (mod 100)
1	01	49	01
2	04	48	04
3	09	47	09
4	16	46	16
5	25	45	25
6	36	44	36
7	49	43	49
8	64	42	64
9	81	41	81
10	00	40	00
11	21	39	21
12	44	38	44
13	69	37	69
14	96	36	96
15	25	35	25
16	56	34	56
17	89	33	89
18	24	32	24
19	61	31	61
20	00	30	00
21	41	29	41
22	84	28	84
23	29	27	29
24	76	26	76
25	25	25	25

Osserviamo che tra le ultime cifre dei quadrati c’è una simmetria notevole. E questo non ha nulla di misterioso. Lo possiamo spiegare semplicemente con i prodotti notevoli
$\mathbf{(50k \pm n)^2 = 2500k^2 \pm 100kn + n^2}$
Possiamo dimostrare che le ultime quattro cifre di un quadrato della forma *aabb* possono essere solo 2244, 3344, 6644, o 7744, con la seguente periodicità:

$(2500k \pm 88)^2$ termina con 7744,
$(2500k \pm 238)^2$ termina con 6644,
$(2500k \pm 688)^2$ termina con 3344,
$(2500k \pm 838)^2$ termina con 2244.

che tra le ultime cifre dei quadrati c’è una simmetria notevole. E questo non ha nulla di misterioso. Lo possiamo spiegare semplicemente con i prodotti notevoli
$\mathbf{(50k \pm n)^2 = 2500k^2 \pm 100kn + n^2}$
Possiamo dimostrare che le ultime quattro cifre di un quadrato della forma *aabb* possono essere solo 2244, 3344, 6644, o 7744, con la seguente periodicità:

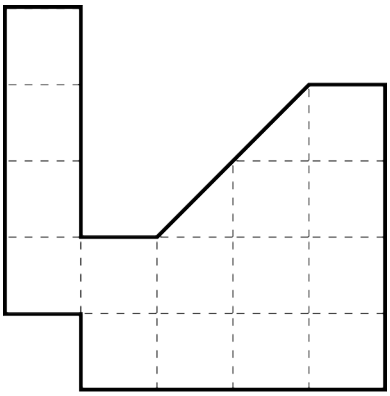
$(2500k \pm 88)^2$ termina con 7744,
$(2500k \pm 238)^2$ termina con 6644,
$(2500k \pm 688)^2$ termina con 3344,
$(2500k \pm 838)^2$ termina con 2244.

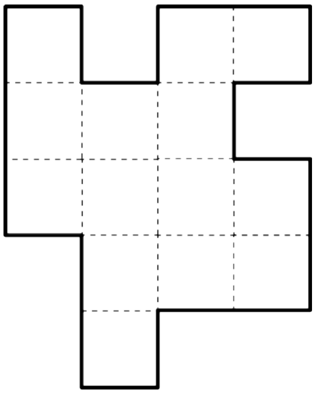
Se continuiamo la ricerca, osserviamo che non esiste alcuna soluzione con 6 cifre, né con 8, ma che ne esiste una con 10 cifre:
$\mathbf{74\,162^2 = 55\,00\,00\,22\,44}$
Ne esistono altre? Il problema è aperto. Avviso a coloro che vogliono cercare la risposta (alcuni informatici hanno fatto dei test fino a numeri molto grandi).
Nota: ho scoperto, più di 20 anni dopo aver avuto l’idea di questo problema, che negli anni trenta, qualcuno aveva proposto lo stesso problema con la medesima risposta nella rivista belga ”Sphinx”. Morale: meglio rimanere modesti…

Problemi di ritaglio

I problemi di ritaglio sono molto antichi. Nel X secolo, il matematico persiano Aboul Wafa (940 - 998), in un’opera intitolata *Libro sulle costruzioni geometriche necessarie all’artigiano*, esplora i modi di ritagliare n quadrati per formare un unico grande quadrato.

La *Fédération Française des Jeux Mathématiques* propone regolarmente problemi di ritaglio. Numerosi matematici pensano e dicono che non esiste alcun metodo per risolvere questo genere di problemi. Ma non è proprio così.
Interessiamoci ai ritagli di una figura in 2 parti sovrapponibili (generalmente anche ricorrendo a un ribaltamento, cioè può darsi che il ribaltamento di una delle due parti sia necessario per assicurare la sovrapponibilità).



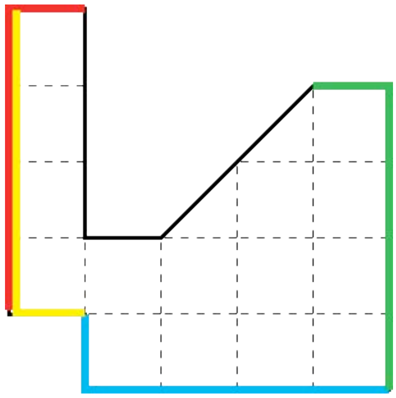


Nel caso di tutti i ritagli in 2 parti sovrapponibili, possiamo affermare che:

- i bordi delle due parti sono sovrapponibili, dunque hanno la medesima lunghezza;
- il bordo di ciascuna parte si scompone in un pezzo di bordo "esterno" e un pezzo di bordo "interno";
- le due parti hanno una lunghezza uguale di bordo esterno e una lunghezza uguale di bordo interno.

Il metodo consiste dunque nello scegliere 2 punti che potrebbero corrispondersi e nel seguire il contorno simultaneamente a partire da questi due punti, rientrando all'interno della figura per uno dei contorni solo se l'altro contorno lo rende necessario.

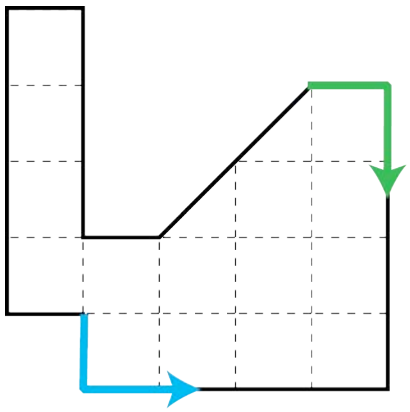
L'esercizio è più semplice per le persone ambidestre…



Diverse parti del contorno si assomigliano.
Bisogna fare una scelta…

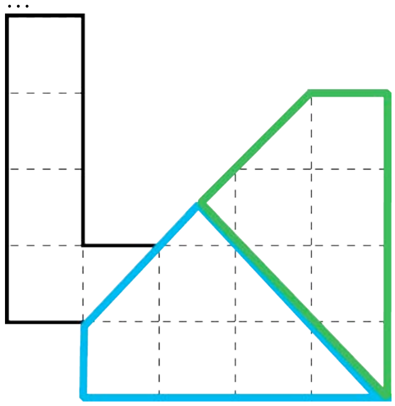
Quante possibilità abbiamo di scegliere 2 pezzi? (Ma certe scelte talvolta possono essere eliminate a priori, come il rosso e il giallo su questo esempio).

Proviamo blu e verde

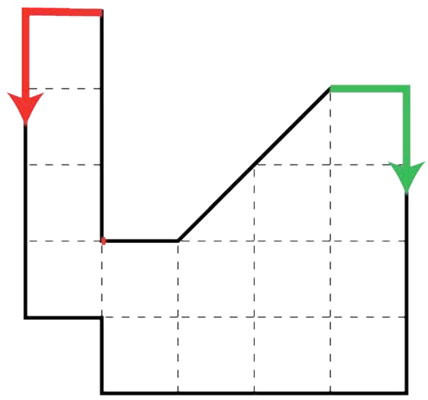


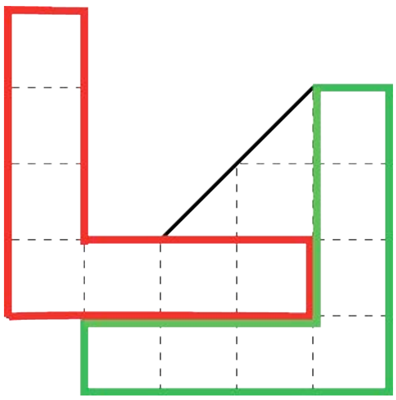
Blu e verde conducono davvero a due parti sovrapponibili, ma che non dividono TUTTA la figura …

…

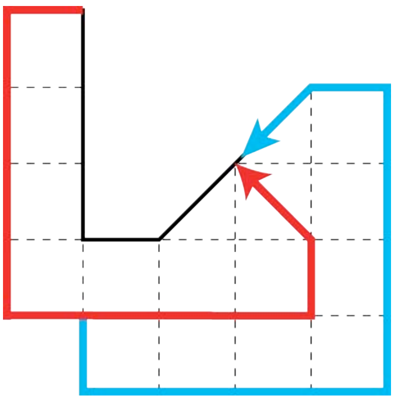


Non funziona neanche con rosso e verde
…

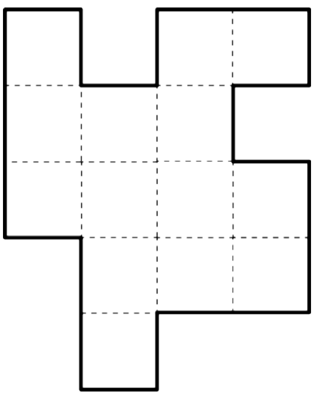




Ma rosso e blu conducono a una soluzione!

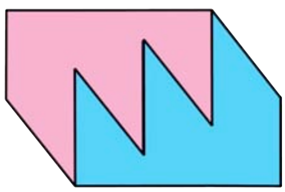


Lasciamo ai lettori il piacere di fare la ricerca per la figura che segue…



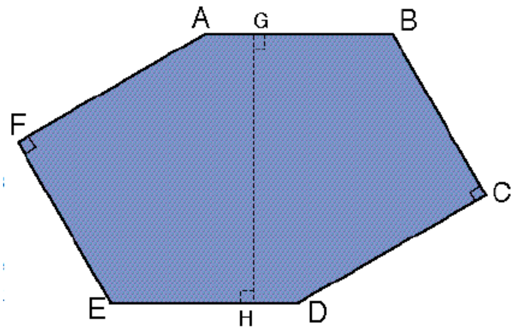
Un altro ritaglio

Abbiamo trovato questo bel disegno in una raccolta di giochi matematici.

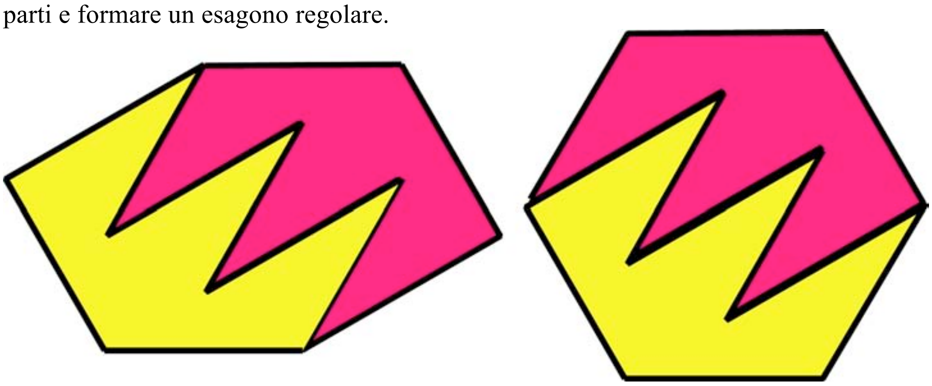


E' più facile passare dall'esagono al quadrato piuttosto che il contrario…
Qualche domanda: possiamo modificare il numero dei tagli a zig-zag?

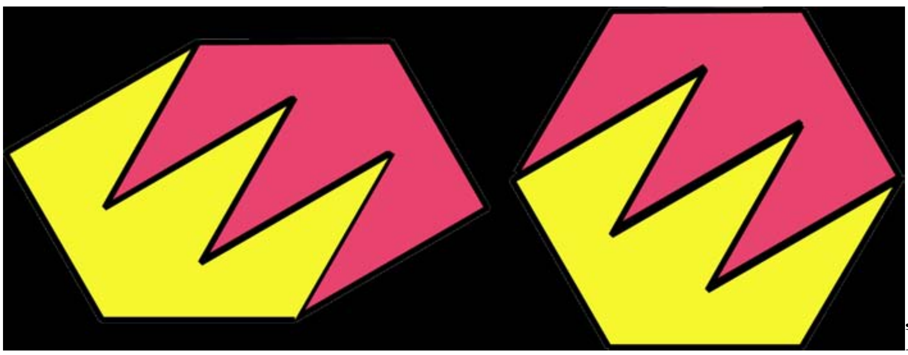
Come influisce questa modifica sull'esagono finale?
Questo problema ci ha portati a chiederci se sia possibile creare un esagono **regolare** con questo tipo di ritaglio.



In questa figura, si ha AF = CD = 20 cm; GH = 25 cm; AB = BC = DE = EF = 10√3 cm.
Si chiede di ritagliare questo esagono (non regolare) in due parti sovrapponibili in modo da poter riunire le due parti e formare un esagono regolare.



Precisiamo che il problema è stato concepito in ordine inverso (a partire dall'esagono regolare).

Ï

CONDIZIONI PER LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI[1]

François Jaquet

Sunto

Agli allievi che partecipano al RMT piace risolvere i problemi che proponiamo loro; gli elaborati e le loro testimonianze lo attestano.
Pensiamo, a priori, che le condizioni di risoluzione dei problemi del RMT siano in correlazione con questo piacere: lavoro di gruppo autonomo (senza intervento dell'insegnante), nelle circostanze particolarmente motivanti di un confronto, indipendentemente dai programmi scolastici, senza altro giudizio oltre ai punteggi attribuiti.
L'esame degli elaborati degli allievi ci fornisce indici preziosi sulle cause della buona riuscita o dell'insuccesso nell'attività di risoluzione di problemi e sulle sue potenzialità per l'elaborazione di una relazione sana tra l'individuo e la matematica.
Tale analisi, che non si limita alle risposte date e alle spiegazioni che le accompagnano, apre la strada a riflessioni sulle condizioni necessarie perché l'attività di risoluzione di problemi possa essere proseguita al di là della gara, in un lavoro in classe, a tutti i livelli e al di là della stessa scolarità.
Queste riflessioni riguardano:
- le relazioni con i programmi degli insegnanti e dell'istituzione scolastica,
- la valutazione degli allievi e dell'insegnamento,
- le modalità di lavoro,
- il riconoscimento dell'autonomia dell'allievo e del suo tempo di apprendimento,
- le caratteristiche personali o predisposizioni alla ricerca.

1. Introduzione

L'introduzione di questa conferenza consiste in una registrazione di due minuti nel corso della quale dieci giornalisti della radiotelevisione della Svizzera romanda rispondono ad una domanda relativa al loro rapporto con la matematica: *vi piace la matematica?*
Tra le loro molteplici risposte, troviamo reazioni:
- a carattere positivo: piace (2), precisione (1), gioco della mente (1) interesse storico (1)
- a carattere negativo: incubo (3), stress (1), catastrofe (2), giornate "rovinate" (1), brutti voti (3), conflitto (1), orrore (3:), sofferenza (1)

per un risultato finale di reazioni di cui 5 positive e 15 negative!!

Queste parole sono forti ed evidenziano un effettivo malessere. E ci toccano, proprio noi del RMT, che vorremmo far amare la matematica tramite la risoluzione di problemi.
Ci poniamo pertanto le domande seguenti:
- questa constatazione dipende dal pubblico interrogato?
- dove si sono sviluppati questi sentimenti nei confronti della matematica?
- queste dieci persone vi sembrano essere nella giusta disposizione di spirito per risolvere dei problemi?
- quali tipi di problemi accetterebbero di risolvere?

Gli allievi, dopo una prova del RMT, ci dicono che "amano" la matematica e che a loro "piace" risolvere dei problemi (di matematica).
Noi pensiamo che, una delle ragioni di tale piacere, siano le condizioni per la risoluzione dei problemi del RMT: lavoro di gruppo, autonomia, motivazione per un confronto, assenza di giudizio, indipendenza dalle abitudini e dai compiti "scolastici".
Il nostro obiettivo, oggi, è quello di riflettere insieme sulla maniera di mantenere tali condizioni anche dopo la gara, negli usi didattici e nella pratica quotidiana in classe, considerando quattro aspetti:

- (Val) la valutazione degli allievi e dell'insegnamento,
- (Mod) le modalità di lavoro: cooperazione, tempi, autonomia,
- (Aff) il clima affettivo.
- (Sap) il rapporto con "i saperi matematici" dei programmi, degli insegnanti, della scuola,

---

[1] Questo articolo riprende la conferenza dell'autore presentata nella giornata di apertura del ventesimo incontro dell'ARMT a Le Locle (Svizzera), il 14 ottobre 2016.

2. Fare matematica e/o risolvere problemi

Una delle finalità del Rally matematico transalpino è "promuovere la risoluzione di problemi per migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica tramite un confronto fra classi" (Art. II.1.a. statuto dell'ARMT).
E' una finalità che troviamo nella maggior parte dei programmi nazionali, come per esempio:
… La risoluzione di problemi costituisce il criterio principale della padronanza delle conoscenze in tutti gli ambiti della matematica, ma è anche il mezzo per assicurare un'appropriazione che ne garantisca il senso… (B.O 26.11.2015 Réforme 3e cycle France)
…, la risoluzione di problemi è al centro in quanto costituisce l'ancoraggio della metodologia in Matematica per dare senso alle nozioni; definire il loro ambito di applicazione… (Plan d'études de Suisse romande, 2011).
Alla lettura di questi testi ufficiali e di numerosi altri, potremmo pensare che la risoluzione di problemi sia unanimemente riconosciuta come strumento prioritario nell'apprendimento della matematica, ma dapprima bisogna capirsi sull'interpretazione del termine "problema".

I problemi del RMT si caratterizzano per la *novità* della situazione per colui che deve risolverlo e per la loro *indipendenza* dai programmi scolastici e dall'ordine in cui le nozioni sono presentate in classe. Vi si incontra un ambito sconosciuto di cui sarà necessario appropriarsi per andare alla ricerca dei saperi da riattivare o da costruire. Questi "veri problemi" si distinguono dagli "esercizi" tradizionali o dai "problemi di applicazione" che sono, gli uni e gli altri, preceduti da una fase di insegnamento della nozione che interverrà nella fase di risoluzione.

Per esempio, nel capitolo dei sistemi di equazioni lineari, dopo aver consacrato diverse lezioni alla presentazione del concetto ed esposto i diversi algoritmi di risoluzione, può succedere che l'insegnante proponga ai propri allievi dei "problemi" che assomigliano a quelli proposti dal RMT, che contengono però una consegna, anche se è implicita: "dovete risolverlo con un sistema di equazioni" visto che ci troviamo nella fase di applicazione delle nozioni appena studiate.

Si trovano anche numerosi casi nei quali la presentazione di un "esercizio" può farlo apparire come un "vero problema", come nell'esempio che segue. Un articolo del quotidiano *La Repubblica* cita uno dei "problemi" dell'esame di maturità scientifica del giugno 2016 in Italia e ne sottolinea il carattere innovatore del suo contesto che si rifà apparentemente ad un problema reale:

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio:

figura 1

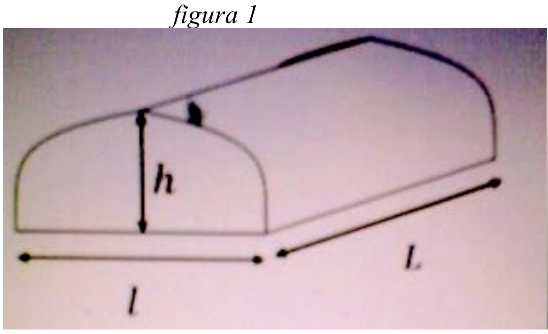
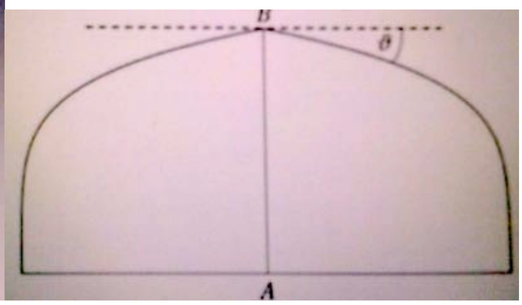


figura 2



h : 1m; L: 8m, l: 2m; ∂ ≥ 10 °, capacità di almeno 13 m^3, con un indicatore graduato installato su AB

Effettivamente, alla lettura di questa prima parte dell'enunciato, possiamo osservare che risponde al criterio *novità* dei problemi del RMT, ma quando si arriva alle domande, si ritrova immediatamente lo stile e la terminologia che *dipende* totalmente dal capitolo dello studio delle funzioni del programma che gli allievi hanno appena finito di affrontare.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per
x [-1, 1], k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ∂ e al volume del serbatoio.
3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione V(z) che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Gli allievi che risolvono i nostri problemi del RMT mostrano di trovarsi in situazioni nuove tramite la diversità delle loro procedure di risoluzione, la ricchezza delle loro rappresentazioni, la varietà dei simboli e dei termini utilizzati. Queste particolarità sono anche messe in evidenza dal successo che riscuotono i nostri problemi presso i genitori quando, convinti dalle testimonianze dei loro figli, accettano di mettersi alla prova con i problemi del RMT (Antonella Castellini, Lucia Fazzino - Gazzetta di Transalpino 3. 2014):

- *Bellissimo!!!! Tra qualche mese compio 50 anni e non ho mai pensato ai giochi matematici… oggi quando ho letto il quesito sono stata rapita… Sono tornata almeno a 30 anni fa, lo stesso entusiasmo, lo stesso spirito competitivo delle gare scolastiche.*
- *Ho partecipato un po' controvoglia costretta da mio figlio… ma è stata una esperienza interessante e anche divertente. Da rifare.*
- *Bene, ottima esperienza, da rifare.*
- *Esperienza positiva e da ripetere. Divertente e socialmente aggregante.*

…

Constatiamo qui che gli adulti possono e amano risolvere problemi, sotto certe condizioni, vicine a quelle delle nostre prove del RMT:

- (Sap) senza fare riferimento alle conoscenze scolastiche o alla matematica
- (Val) senza timore di essere giudicati
- (Mod) con un lavoro comune, prendendo il tempo necessario
- (Aff) con piacere (gioco, sfida, enigma)

Queste condizioni non si realizzano evidentemente con l'esempio del problema di maturità citato più sopra; si realizzano invece all'atto di avvenimenti "eccezionali": gare, giochi, confronti come quelli del RMT.

La questione che ci poniamo è quella di capire se tali condizioni possono permanere al di là delle nostre prove, "al ritorno in classe" con il ricorso alle nostre "indicazioni didattiche".

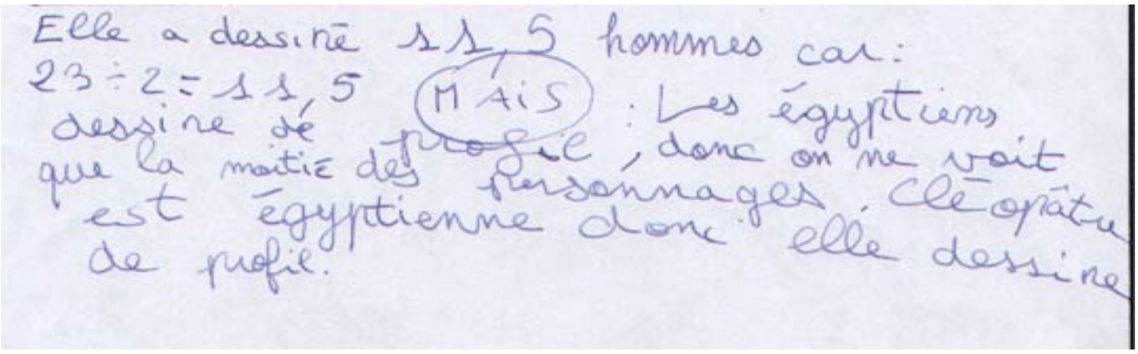
3. L'analisi degli elaborati degli allievi

Ciò che ci dicono gli allievi con la descrizione della loro maniera di risolvere un dato problema è un indicatore prezioso del livello dei saperi (Sap) mobilizzati, ma anche delle componenti affettive (Aff) in merito al loro compito per la risoluzione.
Esaminiamo pertanto ora alcuni elaborati degli allievi a proposito di un vecchio problema del 5° RMT (1997) ripreso diciannove anni dopo nel 24° RMT (2016), mantenendo la medesima versione:

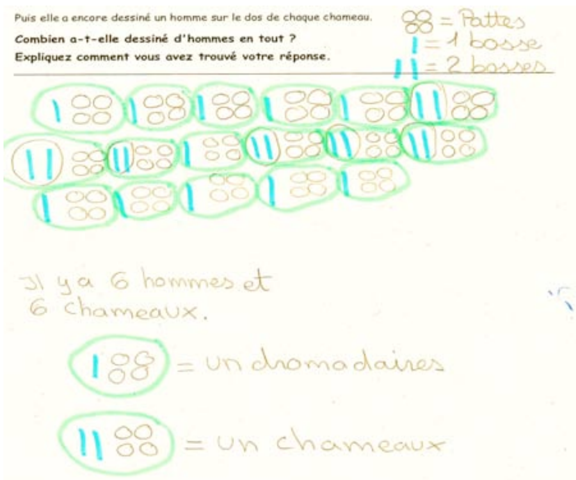
CAMMELLI E DROMEDARI (Cat. 5, 6)
Cleopatra ha disegnato dei cammelli e dei dromedari, in tutto ha fatto 23 gobbe e 68 zampe.
Cleopatra sa che i cammelli hanno due gobbe e i dromedari ne hanno solo una.
Poi ha disegnato un uomo in groppa a ciascun cammello.
Quanti uomini ha disegnato Cleopatra in tutto?
Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

I risultati del 2016 sono come quelli del 1997. Non ci sono differenze significative tra le categorie 5 (10/11 anni) e 6 (11/12 anni); la media dei punteggi attribuiti è sempre di 1,9 su 4, per le 1983 classi di 20 sezioni.
Il 52% degli elaborati fornisce la risposta giusta «6 uomini»: il 23% con «4 punti», il 19% con «3 punti» e il 10% con «2 punti»
Il 21% ha trovato solo i 17 animali.

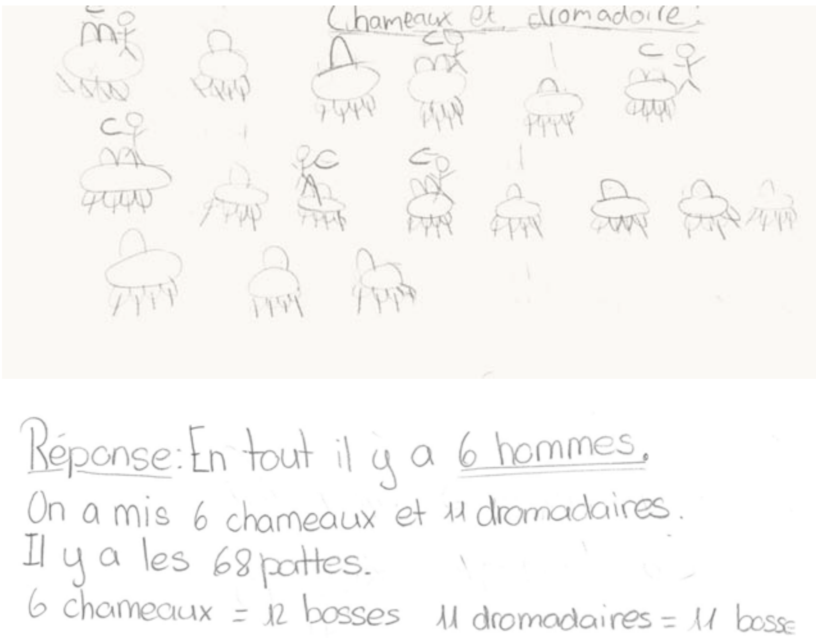
Il 27% è classificato come "incomprensione del problema", ma non figura alcuna risposta in bianco né alcun segno di disinteresse. Per esempio:


Elle a dessiné 11,5 hommes car:
23÷2=11,5 MAIS : Les égyptiens
dessine de profil, donc on ne voit
que la moitié des personnages. Cléopâtre
est égyptienne donc elle dessine
de profil.

Un secondo elaborato, senza spiegazioni testuali:



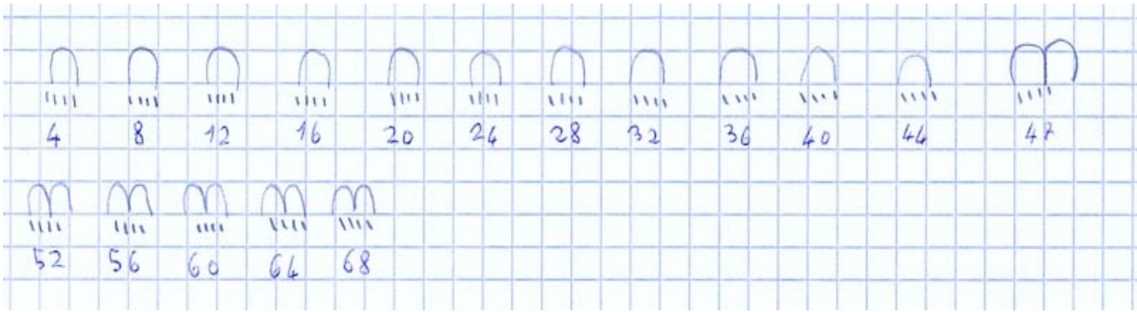
Un terzo elaborato, con un testo piuttosto ridotto:



Un quarto elaborato senza disegno:

Cleopatra ha disegnato 6 uomini in tutto
Abbiamo trovato la soluzione disegnando 4 zampe per ogni animale fino ad arrivare a 68 poi li abbiamo contati e abbiamo scoperto che erano 17. Poi abbiamo messo una gobba ad ognuno e poi un'altra a 6, per arrivare a 23 gobbe e abbiamo scoperto che i cammelli sono 6 e i dromedari 11. Poi abbiamo messo un uomo su ogni cammello.

Un quinto elaborato, rappresentativo di quelli nei quali il disegno evidenzia lo svolgimento cronologico della risoluzione:
23= gobbe in totale, 68=zampe in totale,
2 = gobbe per cammello 1= gobbe per dromedario,
1= uomo su ciascun cammello



Risoluzione:
Dromedari = 11; Cammelli = 6;
6 cammelli = 6 uomini
Risposta: Cleopatra ha disegnato 6 uomini in tutto

4. Dall'analisi degli elaborati degli allievi all'attività in classe

I cinque esempi precedenti, come centinaia di altri elaborati che abbiamo analizzato, illustrano la varietà di produzione degli allievi e danno delle indicazioni sul modo in cui il problema è stato risolto secondo le condizioni particolari del RMT.

Supponiamo ora che questi cinque elaborati appaiano in una classe dove sia stato proposto dall'insegnante il problema *Cammelli e dromedari*, nelle seguenti condizioni:

- (Mod) Il problema è proposto a tutta la classe e gli allievi lo risolvono per gruppi di 2 o 3. Ogni allievo redige poi le sue spiegazioni. 20 minuti senza intervento dell'insegnante, poi preparazione della messa in comune.
- (Aff) Buon ambiente di classe, ma l'insegnante è là ed è il tram-tram quotidiano, con qualche momento piacevole e… di noia! L'allievo sa comunque che non ci saranno tranelli, nel senso che non ci saranno voti, cosa che può essere negativa in caso di insuccesso.
- (Val) L'insegnante cerca di valutare le produzioni ispirandosi ai criteri di attribuzione dei punteggi proposto nell'analisi a priori del problema, dove la distinzione fra "4 punti" e "3 punti" è sovente difficile da stabilire:

4 *Risposta corretta (6 uomini) con spiegazioni chiare e complete (disegno esplicito, procedimento o tentativi che mostrino come si è arrivati alla risposta)*

3 *Risposta corretta (6 uomini) con spiegazioni che mostrano soltanto uno o due tentativi o soltanto una verifica del tipo 6 + 11 = 17 e (6 × 2) + 11 = 23*
oppure risposta "6 cammelli e 11 dromedari" senza fare riferimento agli uomini con spiegazione completa, schema o tentativi descritti, disegno esplicito

2 *Risposta corretta, (6 uomini) senza alcuna spiegazione*
oppure risposta "6 cammelli e 11 dromedari" senza fare riferimento agli uomini con spiegazione parziale
oppure risposta errata a causa di un errore di calcolo ma con procedura corretta

1 *Determinazione soltanto del numero totale di animali: 17*
oppure più tentativi, ma senza arrivare alla risposta corretta

0 *Incomprensione del problema*

Nella situazione reale di classe è prevista una messa in comune dopo la risoluzione. La discussione e/o l'analisi delle produzioni degli allievi non porterà all'attribuzione dei punteggi come nella prova del RMT. Comunque, i criteri appena ricordati possono illustrare la problematica della valutazione, da parte dell'insegnante, dell'attività di risoluzione di problemi che ha organizzato.
Quale sarebbe la sua attribuzione dei punteggi nel caso dei cinque elaborati precedenti?

4.1. Le reazioni dell'insegnante

Per esempio, se voi foste nei panni dell'insegnante, come reagireste di fronte al quinto esempio?

- fareste i complimenti all'allievo,
- direste che va bene ma…
  … ci vuole troppo tempo a disegnare tutte le zampe
  … è più semplice fare 68 : 4
  … non è molto sicuro, si possono fare degli errori,
- guardereste l'allievo o il gruppo con aria divertita,
- chiedereste che cosa ne pensino gli altri,
- senza alcun commento, voi direste: *ora che hai trovato la soluzione, rifai il problema con 384 zampe e 120 gobbe.*

Se però osservate bene, questo quinto elaborato utilizza la risoluzione più semplice ed efficace possibile: non è lungo contare di quattro in quattro per arrivare a 68, ci sono pochi rischi di errore. Anche mettere una gobba su ciascun gruppo di 4 non è difficile! Contare le 17 gobbe e sistemare una seconda gobba a partire dalla fine per arrivare a 23 è peraltro elementare! E' allora sufficiente contare le sei paia di gobbe per rendersi conto che ci sono sei cammelli e, di conseguenza, sei uomini.
Inutile la divisione di 68 per 4, inutile la sottrazione di 23 – 17, inutili le ipotesi e i tentativi per determinare il numero di cammelli!

A ciascuna delle vostre reazioni corrisponderà un'interpretazione da parte dell'allievo che sarà messa nella sua "memoria affettiva" relativa all'oggetto "matematica":

- positiva con l'ammirazione, il riconoscimento, l'interesse manifestato dall'insegnante, la sfida lanciata dal cambiamento di variabili
- negativa con i "sì, ma" e le argomentazioni dubitative o il sorrisetto.

Il "sì, ma" è una reazione che corrisponde all'attribuzione dei "3 punti" ricevuta dalla maggior parte degli elaborati precedenti dove il numero di animali (17) è stato trovato con il disegno, così come la ripartizione delle gobbe, senza alcun riferimento a delle operazioni.
E possiamo immaginare che, probabilmente, tale attribuzione sia ricevuta negativamente dall'allievo.

4.2. Le reazioni dell'allievo

I termini "spiegazione", "giustificazione", "verifica", "completa", "chiara", "poco chiara", sono l'oggetto di discussioni talvolta animate all'atto della redazione dei nostri criteri di attribuzione dei punteggi. È una preoccupazione dell'adulto.
Non è quella dell'allievo che cerca di risolvere il problema.
C'è una sorta di malinteso che possiamo illustrare per esempio con il seguente dialogo fittizio tra un allievo e un adulto che lo sta valutando.
L'insegnante: *La tua spiegazione non è molto chiara.*
L'allievo: *Mi hai chiesto di trovare la soluzione, ho cercato, ho riflettuto e sono contento di averla trovata. Mi hai anche chiesto di spiegare come l'avessi trovata, allora ti ho detto come ho fatto e ho fatto anche un disegno* (nel caso tu non avessi capito).
Hai la mia risposta, mi sembra che sia giusta, hai le mie spiegazioni (se ciò che ti racconto non ti piace, non è un problema mio, è il tuo!)

4.3. Una sintesi provvisoria

(Mod) Le modalità di risoluzione dei problemi del RMT sono particolari. Sono diverse da quelle che ritroviamo in classe.

(Val) Le prime attribuzioni dei punteggi o le analisi a posteriori vengono fatte senza gli allievi. In classe, l'insegnante è di fronte ad un allievo che conosce bene, al quale deve giustificare la sua valutazione, con tutti i vincoli dell'istituzione (voti, pagelle, calendario…)
(Sap) È anche qui che intervengono le esigenze dei programmi (ispezioni, esami, prove nazionali o regionali…)
(Aff) È in questo ambiente che si gioca il piacere o il rigetto per la "matematica" e la capacità di "risolvere problemi".
Le reazioni possibili dell'insegnante di fronte a certe procedure degli allievi sono solo un approccio suggerito dall'osservazione degli elaborati, ma possiamo andare ancora oltre nell'anticipazione del passaggio in classe.

5. I saperi attesi

Abbiamo detto precedentemente che i problemi del RMT mettono gli allievi in una situazione caratterizzata dalla loro novità: l'indipendenza, la devoluzione dei compiti, la cooperazione. Sono anche concepiti per essere utilizzati in classe in un percorso di apprendimento previsto e gestito dall'insegnante sulla base dei risultati ottenuti durante le prove del RMT e delle analisi a posteriori. In questa prospettiva si incontreranno evidentemente nozioni, conoscenze o saperi esplicitamente citati nei programmi.
In questa sede ne esamineremo due, sempre relativi alla lettura delle produzioni degli allievi in merito al problema *Cammelli e dromedari*: la divisione e poi la sottrazione.
Queste operazioni figurano nei programmi scolastici dei livelli coinvolti (10/12 anni) di tutti i nostri paesi. Ne costituiscono addirittura delle nozioni essenziali e "irrinunciabili".

5.1. La divisione

In *Cammelli e dromedari* si tratta della divisione 68 : 4.

Nella maggior parte degli elaborati si fa riferimento a tale divisione.
Per esempio:
- *Noi abbiamo fatto subito 68 : 4 che erano gli animali*
- *Dato che ogni cammello e dromedario ha 4 zampe, abbiamo fatto 68 : 4 = 17 …*
- *Sapendo che ogni animale ha 4 zampe abbiamo diviso il totale delle zampe per 4 (cioè le zampe per ogni animale) e c'è venuto 17…)*

Altri (fra i quali i cinque precedenti) si limitano a un disegno o a un testo:
- *Abbiamo trovato la soluzione disegnando 4 zampe per animale fino ad arrivare a 68, poi li abbiamo contati e abbiamo scoperto che erano 17.*

Altri scrivono la moltiplicazione 17 × 4 = 68.
Qualche altro ancora non menziona quest'operazione.

L'insegnante che vede apparire, o no, la scrittura *68 : 4* negli elaborati dei suoi allievi e che ne fa un collegamento con il sapere "divisione" del suo programma ha diverse strade o decisioni possibili da prendere all'atto della messa in comune e dell'istituzionalizzazione:
è necessario proporre, o imporre, questa scrittura agli allievi che non l'hanno fatta figurare nel loro elaborato? Possiamo utilizzarla da un punto di vista didattico?

La relazione-chiave che permette di trovare 17 animali traduce il contesto "i cammelli hanno quattro zampe, e anche i dromedari, e ci sono 68 zampe in tutto", con due moltiplicazioni per 4, un'addizione e una uguaglianza che porta alla scrittura sintetica dell'adulto "algebrista": $4c + 4d = 68$ dove c e d sono i numeri rispettivi di cammelli e dromedari, ancora indeterminati.
Che si sia bambini o adulti, prima di arrivare all'operazione di "divisione" bisogna essere coscienti del fatto che l'addizione delle due moltiplicazioni per quattro, $4c + 4d$, può scriversi o può essere concepita come una sola moltiplicazione per quattro: $4(c + d)$, per arrivare all'uguaglianza $4(c + d) = 68$, che è ancora solo una "moltiplicazione aperta", $4 \times \ldots = 68$, la quale, infine corrisponde alla divisione $68 : 4 = \ldots$. Due saperi intermedi sono così coinvolti in questa sequenza di ragionamento: la distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione, poi il fatto che la moltiplicazione e la divisione sono due operazioni, una inversa dell'altra.

Per molti allievi non è più un problema, è una "certezza" (sapere interiorizzato a seguito di problemi risolti in precedenza): *Abbiamo fatto subito 68 : 4 che sono gli animali.*
Per altri è un problema, forse semplice, ma per il quale ci si sforza di dare una giustificazione: *Poiché ogni cammello e ogni dromedario ha 4 zampe, abbiamo fatto 68 : 4 = 17*

Per altri ancora il sapere non è mobilizzato spontaneamente, in questa situazione (circa il 40%): disegno, moltiplicazione.
Ed infine, sembra che il sapere non sia davvero disponibile nel caso di allievi che scrivono divisioni del tipo 23 : 2; 23 :1; 23 : 17; 68 : 2; 68 : 23.

Che cosa fare di questo sapere in elaborazione, a livelli differenti nelle produzioni degli allievi che sono state analizzate e forse anche all'interno di una stessa classe?

- Istituzionalizzare la scrittura 68 : 4, pensando che nella categoria 5 e ancor di più nella categoria 6 gli allievi dovrebbero fare appello naturalmente alla distributività e dovrebbero sapere che una moltiplicazione aperta può essere sostituita da una divisione. C'è allora il rischio che questa istituzionalizzazione sia considerata come una semplice prescrizione dell'insegnante per allievi che non sono ancora capaci di appropriarsi di saperi soggiacenti né della catena deduttiva necessaria.

- Lasciare "maturare" questi saperi che portano all'operazione 68 : 4 e approfittare di questa occasione per insistere sulla distributività sottolineando la pertinenza di espressioni come: *i cammelli e i dromedari hanno quattro zampe e calcoliamo il numero di animali a quattro zampe*… . Bisogna allora essere coscienti che rinunciamo momentaneamente al "programma" e che assumiamo il rischio di non aver preparato la classe per una "valutazione nazionale" o "locale".

- Cercare di renderla necessaria, proponendo per esempio la variante (già citata) del problema con 384 zampe e 120 gobbe.

In ogni caso, la decisione è dell'insegnante che si pone nell'intersezione tra saperi (Sap) e affettività (Aff) in quanto l'istituzionalizzazione precoce avrà degli effetti sul loro futuro:
confusioni => automatismi aleatori => errori => insicurezza => paure, …

Possiamo anche aggiungere che per gli allievi che hanno pensato o scelto di trovare il numero degli animali con la divisione 68 : 4, l'operazione può essere effettuata mentalmente, con la calcolatrice o con l'ausilio di un algoritmo.
Numerosi elaborati presentano un algoritmo in colonne del tipo:

$$\begin{array}{r|l} 68 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{4} & 17 \\ 28 & \\ \underline{28} & \\ 0 & \end{array}$$

Si tratta in questo caso di una scelta "automatica e meccanica" della disposizione dell'algoritmo in colonna, non necessaria quando il divisore è un numero di una sola cifra, che differisce dalla scrittura lineare 68 : 4 = 17 solo per l'esplicitazione dei due «28».
Talvolta si confondono i "saperi" sulla divisione con il suo algoritmo in colonna, che è, al massimo, una "conoscenza strumentale" che diventa obsoleta con l'uso della calcolatrice.

5.2. La sottrazione

Quando il numero di animali è determinato, si può passare alla ripartizione delle gobbe secondo il contesto: 23 gobbe tra 17 animali, gli uni con una gobba, gli altri con due gobbe.
Le produzioni degli allievi descrivono questa ripartizione in diversi modi:

- con tentativi più o meno fortunati seguiti da una verifica, per esempio:
  ... 17 animali. 6 cammelli e 11 dromedari 6 × 2 gobbe = 12
  11 × 1 gobba = 11 12 gobbe + 11 gobbe = 23 gobbe
- con tentativi sistematici dove le coppie (cammelli, dromedari) sono pensati con il calcolo delle gobbe corrispondenti che conduce a lunghe liste ordinate del tipo
  (1; 16) … (2; 15) … (3; 14)
- ma anche con ragionamenti deduttivi:
  ... 17 animali. Perché se avessimo solo i cammelli avremmo 34 gobbe in tutto allora questo vuol dire che ce ne sono 11 di troppo. Togliamo 11 cammelli e aggiungiamo 11 dromedari…
  -*... Numero di cammelli in tutto: 23 gobbe – 17 dromedari = 6 cammelli*
  - *Operazioni 68 : 4 = 17; 23 – 17 = 6; 17 – 6 = 11*. Ci sono *6 cammelli perché se ci fossero 11 cammelli ci sarebbero 22 gobbe. 22 + 6 = 28 e ci sono solo 23 gobbe. Dunque ci sono solo 6 uomini.*

Gli autori dell'analisi a priori del compito non avevano previsto l'operazione 23 – 17 = 6, avevano solamente pensato a dei tentativi e a una procedura ipotetica vicina all'addizione del tipo frase aperta 17 + … = 23:

... Per risolvere questo "sistema di equazioni" si può procedere per tentativi a caso, per tentativi organizzati progressivamente, con l'inventario di tutte le coppie la cui somma è 17, oppure per deduzione del tipo: se tutti gli animali sono dei dromedari, ci sarebbero 17 gobbe e ne mancherebbero 6; di conseguenza bisogna sostituire 6 dromedari con 6 cammelli.…

Questa sottrazione si ritrova implicitamente nelle risoluzioni grafiche, ma appare esplicitamente tra il 5 e il 10% degli elaborati.

Nella variante (già citata) del problema con 384 zampe e 120 gobbe, la sottrazione sarà la benvenuta!

La tentazione è di proporla direttamente agli allievi, o addirittura di istituzionalizzarla alla fine della messa in comune, con il rischio che possa essere interpretata come un "trucco" o un "automatismo".

Un dialogo reale per illustrare tale rischio:

il nonno (N) è curioso di sapere quale sia la padronanza delle addizioni da parte della sua nipotina M, di 7 anni, seconda di scuola primaria.

Dopo qualche verifica del tipo 2 + 2; 4 + 5; 6 + 7 … :

M - So anche fare 30 + 30

N- In che modo?

M - Basta togliere lo zero, fare 3 + 3 e rimettere uno zero dopo.

N - E quanto fa?

M - Beh… 16!

N- ??

M - No, fa 60!

N- Sì, è giusto. Sei stata tu a trovare questo trucco?

M - No, ce l'ha dato la maestra.

La maestra di M ha nel programma "estensione alle decine del repertorio additivo".

In linguaggio matematico, si tratta di

$30 + 40 = 3 \times 10 + 4 \times 10 = (3 + 4) \times 10 = 7 \times 10 = 70$

Che fa appello alla scomposizione in prodotti di 30 e 40, alla distributività dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, al repertorio additivo e alla moltiplicazione per 10.

M ha memorizzato il "trucco", ma non può capire la scomparsa dei due zero e la riapparizione di uno dei due al momento di dare la risposta.

Quando arriverà alla moltiplicazione, 30×40 rischia di darle 120!

Il ricorso ai modelli delle "decine" è migliore: 30 + 40 significa 3 decine + 4 decine, quindi 7 decine. Si basa però ancora sulla distributività e, per la moltiplicazione, l'ostacolo si situerà a livello di "prodotto di decine" dove interverranno ancora la commutatività e l'associatività.

5.3. Dalle procedure insegnate alle procedure riflettute

Le riflessioni precedenti sulle due operazioni-chiave del problema *Cammelli e dromedari* sollevano l'importanza delle scelte e delle decisioni dell'insegnante nel corso della messa in comune e della successiva fase di istituzionalizzazione.

Abbiamo visto che nel caso di questo problema,

- dividere 68 per 4, evita di disegnare tutti i gruppi o di contare di 4 in 4 fino a 68 o di pensare a una moltiplicazione o ad addizioni ripetute o a sottrazioni successive.
- sottrarre il numero di animali al numero di gobbe, evita i tentativi di ripartizione, i disegni o le divisioni inadeguate.

Queste due procedure permettono di arrivare alla soluzione in maniera efficace e saranno ancora valide per varianti del problema con numeri più grandi. L'analisi a posteriori degli elaborati mostra che sono adottate da alcuni gruppi di allievi che le hanno già interiorizzate permettendo di guadagnare tempo e faciliterà il passaggio alla generalizzazione e poi all'entrata nell'algebra. Possiamo pensare che siano diventate procedure andate a buon fine o riflettute o addirittura "esperte", laddove vengano riconosciute come economiche, sintetiche ed efficaci.

Per altri allievi tali procedure sono solo in via di costruzione o non sono considerate come necessarie perché ci sono altri modi per arrivare alla soluzione.

L'insegnate sa che le procedure "esperte" sono uno degli obiettivi da far raggiungere ai propri allievi e di conseguenza è tentato di "insegnarle"; cioè di mostrare come si fa, di spiegare il metodo, di chiedere di eseguire.

Se gli allievi non sono ancora capaci di partecipare in prima persona, allora, come verrà mostrato con gli errori descritti più avanti, tale procedura "insegnata" prematuramente rischia di aggiungersi a tutte le precedenti per costituire il tessuto sul quale si sviluppa l'incomprensione, poi la sconfitta, l'incapacità e infine il rigetto della matematica.

La risoluzione di problemi è un rivelatore del livello di costruzione di numerosi concetti riconosciuti come "competenze" secondo la terminologia attuale dei programmi che li suppongono "acquisiti" alla fine del "ciclo X" della scolarità.

Piuttosto che "insegnare" non è forse meglio riprendere questi concetti la cui elaborazione è ancora da completare, fare un tratto di cammino con l'allievo verso una migliore padronanza dei saperi incontrati?

Le scelte degli insegnanti sono delicate e val la pena ritornare ai criteri descritti in precedenza:
(Sap) La priorità non è quella del sapere scolastico, ma si situa là dove si trova l'allievo nel suo percorso di apprendimento.
(Val) Facciamo una diagnosi, constatiamo, valutiamo il livello di un sapere attraverso le produzioni degli allievi, ma senza emettere un giudizio.
(Mod) La cooperazione offre buone condizioni per stimolare il processo di apprendimento.
(Aff) L'assenza di giudizio negativo, il rispetto delle procedure di ciascuno dovrebbero contribuire a dare un'immagine positiva della matematica.

5.4. Gli insuccessi

Ci siamo finora interessati alle procedure e ai saperi che permettono di arrivare alla soluzione del problema *Cammelli e dromedari*. E' ora tempo di interessarci agli ostacoli e alle difficoltà osservate nel corso dell'analisi a posteriori delle produzioni degli allievi.
Tra il 40 e il 50 % dei gruppi ha trovato una risposta diversa dai "6 uomini" nella prova del RMT. Succederà anche in classe, in condizioni similari: per gruppi e senza intervento dell'insegnante, prima di affrontare la prima messa in comune, senza il timore di un voto o di un giudizio negativo.
Ecco qualche esempio di produzione che non arriva alla risposta corretta:
- Cleopatra ha disegnato in tutto 17 uomini. Noi abbiamo fatto 68, che sono le zampe in tutto, diviso 4 che sono le zampe di ciascun cammello e dromedario e il risultato è 17.
- 8 cammelli, 7 dromedari 2 uomini. Per arrivare alla soluzione abbiamo diviso 68 che sono le zampe in totale diviso 4 che fa il totale di tutti gli animali e le gobbe.
- 68 : 4 = 17 animali; 23 – 3 = 20; 20 : 2 = 10 cammelli e uomini
- Abbiamo calcolato solo le gobbe… abbiamo diviso 23 per 2 per trovare le gobbe, che fa 11 con resto di 1 quel resto di 1 è la gobba del dromedario. Quindi gli uomini sopra i cammelli sono 11 perché i cammelli sono 11.
- Abbiamo diviso le zampe per 2 (68 :2 = 34 persone) che sono le persone che ha disegnato Cleopatra in groppa ad ogni cammello.
- Dati: 13 = gobbe; 68 = zampe; 1 = uomo su ogni cammello
Risoluzione: C'è un dato mancante: n. dei cammelli e dei dromedari che non ci permette di risolvere il problema.

Tutti questi esempi rispettano i quattro criteri sui saperi, la valutazione, il clima affettivo e, in particolare, la modalità di lavoro in gruppo sotto la responsabilità della classe, senza aiuto esterno.
Ci si può dunque sorprendere del fatto che, dopo 50 minuti di lavoro in comune, gruppi di allievi, con un eventuale controllo di altri gruppi, possano arrivare a tali conclusioni.

E' però importante ricordare che sotto l'espressione "lavoro di gruppo" troviamo una varietà di modalità fra le quali, in particolare:

- gruppi formati in precedenza dall'insegnante secondo i suoi criteri di suddivisione degli allievi;
- gruppi formati in maniera autonoma, non imposti, in seno ai quali ci sono scambi e collaborazione;
- gruppi aperti, adattabili, mobili, che collaborano con altri gruppi;
- insieme di allievi seduti intorno a uno stesso tavolo, che leggono l'enunciato ognuno per conto proprio, senza parlarne fra loro, senza comunicare, lasciando a uno di essi il compito di redigere la risposta.

Forse è un "gruppo" di quest'ultima modalità quello che è arrivato alla precedente conclusione.
Lacune a livello dei saperi matematici non sono certamente le responsabili di tali insuccessi.
La cooperazione e l'autonomia non si "insegnano", le si coltiva e questo richiede del tempo!

6. Sintesi e conclusioni

Per questa sintesi ci permettiamo di citare qualche estratto di un articolo di G. de Vecchi[2] come supporto dei nostri criteri (Val) e (Aff):
Abbandonare progressivamente le modalità di valutazione traumatiche che, nel caso di certi allievi, distruggono la confidenza nelle proprie capacità e cancellano il loro desiderio di apprendere…
Dare all'errore uno statuto positivo, considerandolo come un indicatore di ostacoli da abbattere senza fargli portare il peso di un giudizio negativo.
Bandire i voti e le medie che nascondono le vere ragioni dei successi e degli insuccessi, sostituendole con valutazioni differenziate e adattate a ciascun allievo per permettergli di misurare i propri progressi e il cammino che gli resta ancora da percorrere.
Il rigetto e la paura della matematica, che prova una parte cospicua di adulti e di allievi, si sviluppano a scuola. E' dunque a scuola che bisogna agire per mettere rimedio a questa immagine negativa della matematica.
La nostra esperienza del RMT ci mostra che ai nostri allievi, e anche ai loro genitori, piace risolvere problemi di matematica, in condizioni particolarmente favorevoli.
Le analisi a posteriori delle produzioni degli allievi ci mostrano anche che la risoluzione di problemi permette una valutazione differenziata quando riusciamo a capire ciò che l'allievo racconta su come trova o non trova la soluzione.

Nel ritornare in classe per un'utilizzazione didattica dei nostri problemi, i vincoli dell'istituzione scolastica impongono un programma, delle certificazioni individuali (voti), una gestione del tempo…
La risoluzione di problemi permette comunque di preservare certe condizioni favorevoli all'apprendimento nell'ambito della matematica, purché:

- si osservi il livello effettivo della costruzione delle conoscenze nelle produzioni degli allievi, indipendentemente dai programmi,
- si lasci liberi gli allievi di esprimersi, cercare e anche sbagliare senza voler risolvere il problema al loro posto,
- ci si astenga rigorosamente dal giudicarli negativamente.

Non è semplice, anzi, è molto difficile, ma è solo a tale prezzo che possiamo sperare di allontanare la paura e di lasciare il posto al piacere di cercare e di scoprire relazioni, proprietà, saperi che partecipano all'apprendimento della matematica.

[2] G. de Vecchi, in Café pédagogique, septembre 2008.

CONDITIONS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES[1]

François Jaquet

Résumé

Les élèves qui participent au RMT aiment résoudre les problèmes qu'on leur propose ; leurs copies et leurs témoignages l'attestent.
Nous pensons, a priori, que les conditions de résolution des problèmes du RMT sont en corrélation avec ce plaisir : travail en groupe, de manière autonome (sans intervention de l'enseignant), dans les circonstances particulièrement motivantes d'une confrontation, indépendamment des programmes scolaires, sans autre jugement que le nombre de points attribués.
L'examen de copies rendues par les élèves nous donne des indices précieux sur les causes de la réussite, ou de l'échec dans l'activité de résolution de problèmes et sur ses potentialités pour l'élaboration d'une relation saine entre l'individu et les mathématiques.
L'observation des copies ne se limite pas aux réponses données et aux explications qui les accompagnent ; elle ouvre le champ à des réflexions sur les conditions nécessaires pour que l'activité de résolution de problèmes puisse se poursuivre au-delà de l'épreuve du RMT, dans le travail en classe, à tous les degrés et au-delà même de la scolarité.
Ces réflexions concernent :
- le rapport aux programmes, des maîtres et de l'institution scolaire,
- l'évaluation, des élèves et de l'enseignement,
- les modalités du travail,
- la reconnaissance de l'autonomie de l'élève et de son temps d'apprentissage,
- les caractéristiques personnelles ou prédispositions à la recherche.

1. Introduction

L'introduction de cette conférence consiste en un enregistrement de deux minutes au cours duquel dix journalistes de la radiotélévision suisse romande répondent à une question relative à leurs rapports avec les mathématiques : *Aimez-vous les maths ?*
Parmi leurs nombreuses réponses, on relève des propos :
- à caractère positif : aimer (2), précision (1), jeu de l'esprit (1) intérêt historique (1)
- à caractère négatif : cauchemar (3), stress (1), catastrophe (2), journée « foutue » (1), mauvaise note (3) conflit (1), horreur (3), souffrance (1)

pour un score final de 5 à 15 !!
Ces paroles sont fortes, elles révèlent un vrai malaise. Elles nous interpellent, nous du RMT, dont un des buts affichés est de faire aimer les mathématiques au travers de la résolution de problèmes. Elles nous posent les questions suivantes :
- Ce constat dépend-il du public interrogé ?
- Où se sont développés ces sentiments face aux mathématiques ?
- Ces dix personnes sont-elles dans de bonnes conditions pour résoudre des problèmes ?
- Quels types de problèmes accepteraient-elles de résoudre ?

Lorsqu'on interroge les élèves après une épreuve du RMT, ils nous disent qu'ils « aiment » les maths ou qu'ils « aiment » résoudre des problèmes (de maths).
Nous pensons, a priori, que les conditions de résolution des problèmes du RMT sont une des raisons de ce plaisir : travail en groupe, autonomie, motivation d'une confrontation, absence de jugement, indépendance par rapport aux tâches et habitudes « scolaires ».
Notre but aujourd'hui est de réfléchir ensemble sur la façon de maintenir ces conditions après la passation de l'épreuve, dans ses exploitations didactiques et les pratiques de classe.
Nous choisissons d'organiser cette réflexion selon quatre critères :
- (Sav.) le rapport aux « savoirs mathématiques » des programmes, des maîtres, de l'école,
- (Eval.) l'évaluation des élèves et de l'enseignement,
- (Mod.) les modalités du travail : coopération, temps, autonomie
- (Aff.) le climat affectif.

---

[1] Cet article reprend la conférence prononcée par l'auteur lors de l'ouverture de la vingtième rencontre de l'ARMT, au Locle, le 14 octobre 2016

2. Faire des maths et/ou résoudre des problèmes

Une des finalités du Rallye mathématique transalpin est de « promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques par une confrontation entre classes » (Art. II.1.a. des statuts de l'ARMT).
On la retrouve dans la plupart de nos programmes nationaux, comme, par exemple :
« … La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maitrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens… » (B.O 26.11.2015 Réforme 3e cycle France)
« … La résolution de problèmes est au centre, car c'est le point d'ancrage de la démarche en mathématiques pour : donner du sens aux notions ; définir leur cadre d'application ; construire des connaissances opératoires. … ». (Plan d'études de Suisse romande, 2011)
A la lecture de ces textes officiels et de nombreux autres, on peut penser que la résolution de problèmes est unanimement reconnue comme un instrument prioritaire dans l'apprentissage des mathématiques, mais il faut encore s'entendre d'abord sur la l'interprétation du mot « problème ».

Les problèmes du RMT se caractérisent par la *nouveauté* de la situation pour celui qui doit le résoudre et par leur *indépendance* du programme et de l'ordre dans lequel les notions y sont présentées. On y affronte un milieu inconnu qu'il faudra s'approprier dans lequel on devra aller rechercher des savoirs à réactiver ou à construire. Ces « vrais problèmes » se distinguent de « l'exercice » traditionnel ou du « problème d'application » qui sont l'un et l'autre précédés d'une phase d'enseignement de la notion qui interviendra dans la phase de résolution.

Par exemple, dans le chapitre des systèmes d'équations linéaires, après avoir consacré plusieurs leçons à la présentation du concept et exposé les différents algorithmes de résolution, le professeur peut proposer à ses élèves des « problèmes » qui ressemblent dans leur énoncé à ceux que propose le RMT, mais qui sont reçus avec la consigne évidente, même si elle est implicite : « vous devez le résoudre par un système d'équations » vu qu'on est dans la phase d'application des notions à peine étudiées.

On rencontre aussi de nombreux cas où l'insertion de « l'exercice » peut le faire paraître comme un « vrai problème » comme dans l'exemple suivant :
Un article du quotidien *La Repubblica,* cite un des « problèmes » de l'examen de maturité scientifique de juin 2016 en Italie, et en souligne le caractère innovateur de son contexte (qui engage apparemment l'étudiant dans une application pratique des mathématiques :

- L'administrateur d'une copropriété doit installer un réservoir à mazout. Ne trouvant rien sur le marché qui corresponde à ses besoins, il te charge d'un projet répondant aux exigences suivantes :

figure 1

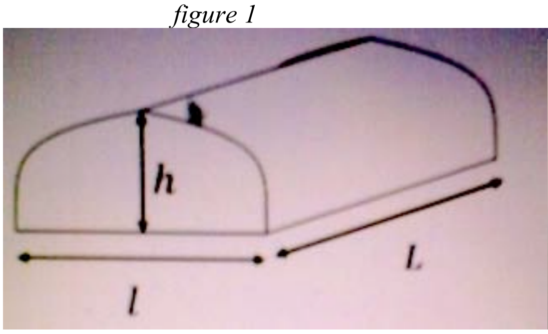
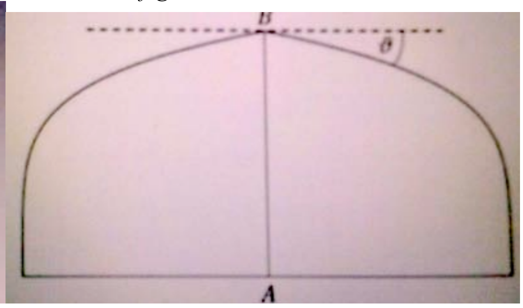


figure 2



$h = 1$ m; $L = 8$ m, $l = 2$ m ; $\partial \geq 10$ ° pour l'écoulement, capacité de 13 m^3 au minimum, avec une jauge graduée installée sur AB

Et effectivement, à la lecture de cette première partie de l'énoncé on remarque qu'il répond au critère *nouveauté* des problèmes du RMT, mais lorsqu'on arrive aux questions, on retrouve immédiatement le style et la terminologie en *dépendance* totale du chapitre de l'étude des fonctions du programme que les élèves viennent de terminer.

1. Considérant comme origine des axes cartésiens le point A de la figure 2, identifie parmi les familles de fonctions suivantes, celle qui peut décrire au mieux le profil latéral du réservoir pour
x € [-1, 1], k entier positif, en motivant ton choix :

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Détermine la valeur de k qui permet de satisfaire les exigences relatives à l'angle ∂ et au volume du réservoir.
3. Pour réaliser la jauge graduée, détermine l'expression de la fonction V(z) qui associa au niveau z du mazout (en mètres) le pourcentage de remplissage V du volume à faire apparaître sur la jauge.

Les élèves qui résolvent nos problèmes du RMT montrent qu'ils se trouvent dans des situations nouvelles par la diversité de leurs procédures de résolution, la richesse de leurs représentations, la variété des symboles et termes utilisés. Ces particularités sont aussi mises en évidence par le succès de nos problèmes auprès de parents d'élèves lorsque ces derniers, convaincus par les témoignages de leurs enfants, acceptent de se confronter sur des épreuves du RMT (Antonella Castellini, Lucia Fazzino. Gazzetta di Transalpino 3. 2014) :

- *Merveilleux !!!! J'aurai 50 ans dans quelques mois et je n'ai jamais pensé aux jeux mathématiques … aujourd'hui, en lisant les questions j'ai été subjuguée … Je suis retournée au moins 30 ans en arrière, le même enthousiasme, le même esprit de compétition des concours scolaires.*
- *J'ai participé un peu contre ma volonté, contrainte par mon fils … mais ça a été une expérience intéressante et aussi amusante. A refaire.*
- *Expérience positive et à refaire. Amusante et permettant de créer des liens sociaux*
- *…*

On constate ici que des adultes peuvent et aiment résoudre des problèmes, sous certaines conditions, proches de celles de nos épreuves du RMT :
- (Sav) sans se référer aux connaissances scolaires ou aux mathématiques,
- (Eval) sans crainte d'être jugé,
- (Mod) en travaillant ensemble, en prenant le temps nécessaire,
- (Aff) avec le plaisir d'un jeu, d'un défi, d'une énigme à résoudre,

Ces conditions ne sont évidemment pas réalisées dans l'exemple du problème de maturité cité précédemment ; elles le sont lors d'événements « exceptionnels » : concours, jeux, confrontations comme celles de nos épreuves du RMT.
La question qui se pose est de savoir si ces conditions peuvent être préservées au-delà de nos épreuves, lors du « retour en classe » dans ce que nous appelons les « exploitations didactiques » de nos problèmes.

3. L'analyse des productions d'élèves

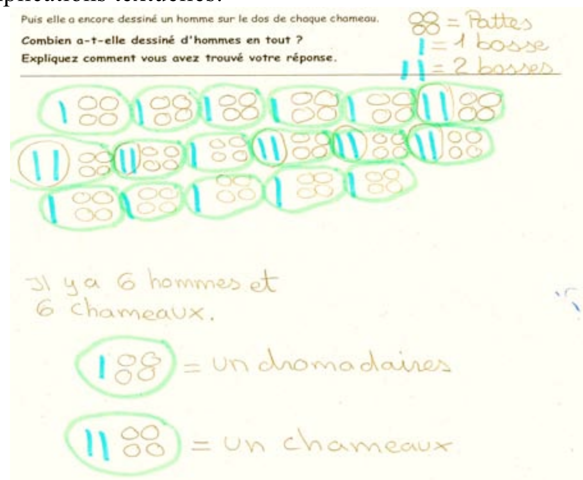
Ce que les élèves nous disent par leurs descriptions de leur manière de résoudre le problème est un indicateur précieux du niveau des savoirs (Sav) mobilisés mais aussi des composantes affectives (Aff) de leur tâche de résolution. Nous examinerons ici quelques productions d'élèves à propos d'un ancien problème du 5e RMT (1997) repris 19 ans plus tard lors du 24e RMT (2016) dans la même version :

CHAMEAUX ET DROMADAIRES (Cat. 5, 6)
Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 23 bosses et 68 pattes.
Elle sait que les chameaux ont deux bosses et les dromadaires n'en ont qu'une.
Puis elle a encore dessiné un homme sur le dos de chaque chameau.
Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

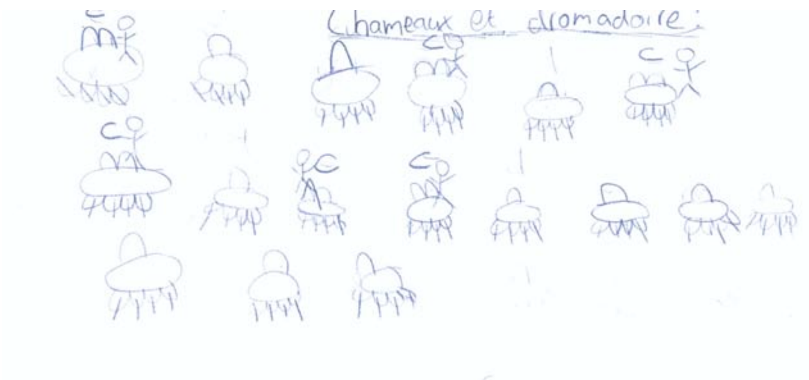
Les résultats sont les mêmes en 2016 qu'en 1997. On ne relève pas de différences significatives entre les catégories 5 (10 à 11 ans) et 6 (11 à 12 ans) la moyenne des points attribués est toujours de 1,9 sur 4, pour les 1983 classes de 20 sections.
52 % des copies donnent la bonne réponse « 6 hommes » dont 23% ont reçu « 4 points » et 19% « 3 points » ;
21 % ont trouvé seulement les 17 animaux ;
27 % des copies sont notées sous « incompréhension du problème », mais il n'y a aucune feuille blanche ni signe de désintérêt. Par exemple :

Elle a dessiné 11,5 hommes car:
23÷2=11,5 MAIS : Les égyptiens
dessine de profil, donc on ne voit
que la moitié des personnages. Cléopâtre
est égyptienne donc elle dessine
de profil.

Une deuxième copie, sans explications textuelles:



Une troisième copie, avec un texte très réduit:



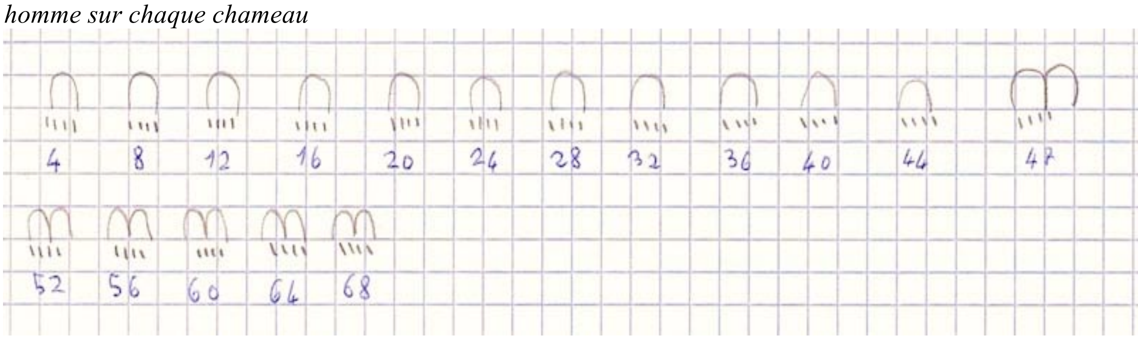
Réponse: En tout il y a 6 hommes.
On a mis 6 chameaux et 11 dromadaires.
Il y a les 68 pattes.
6 chameaux = 12 bosses 11 dromadaires = 11 bosse

Une quatrième copie sans dessin :

Cléopâtre a dessiné 6 hommes en tout.
Nous avons trouvé la solution en dessinant 4 pattes pour chaque animal jusqu'à ce qu'on arrive à 68 puis nous les avons comptées et avons découvert qu'il y en avait 17. Puis nous avons mis une bosse à chacun et une autre à 6, pour arriver à 23 bosses et nous avons découvert qu'il y a 6 chameaux et 11 dromadaires. Puis nous avons mis un homme sur chaque chameau.

Une cinquième copie, caractéristique de celles où le dessin fait apparaître le déroulement chronologique de la résolution :

23= bosses au total, 68= pattes au total,
2 = bosses par chameau 1= bosse par dromadaire,
1= homme sur chaque chameau



Résolution :
Dromadaires = 11 ; Chameaux = 6 ;
6 chameaux = 6 hommes
Réponse : Cléopâtre a dessiné 6 hommes en tout

4. De l'analyse des productions d'élèves aux pratiques de classe

Les cinq exemples précédents, comme les centaines d'autres copies que nous avons examinées, illustrent la variété des productions d'élèves et donnent des indices sur la manière dont le problème a été résolu dans les conditions particulières de l'épreuve du RMT.

Supposons maintenant que ces cinq copies apparaissent dans une classe où le problème *Chameaux et dromadaires* a été proposé par l'enseignant à ses élèves dans les conditions suivantes :

- (Mod) Le problème est donné à toute la classe et les élèves le résolvent par groupes de 2 ou 3. Chaque élève rédige ensuite ses explications. 20 minutes sans intervention de l'enseignant, puis préparation de la mise en commun.
- (Aff) Bonne ambiance de classe, mais le maître est là et c'est le train-train quotidien, avec quelques moments de bonheur et … d'ennui ! L'élève est cependant assuré qu'il n'y aura pas de traquenard, c'est-à-dire pas de sanction sous forme de note, qui peut être négative en cas d'échec.
- (Eval) L'enseignant va chercher à évaluer les productions, en s'inspirant des critères d'attribution des points proposés dans l'analyse a priori du problème, où la distinction entre « 4 points » et « 3 points » est souvent difficile à établir :

4 Réponse correcte, 6 hommes, avec explications complètes, (dessin explicite, démarche ou essais décrits qui montrent comment on est arrivé à la réponse)
3 Réponse correcte, 6 hommes, avec explications ne montrant qu'un ou deux essais, ou seulement une vérification du genre 6 + 11 = 17 et (6 × 2) + 11 = 23,
ou réponse « 6 chameaux et 11 dromadaires » avec oubli de « 6 hommes », avec explications complètes, démarche ou essais décrits, dessin explicite,
2 Réponse correcte, 6 hommes, sans aucune explication
ou réponse « 6 chameaux et 11 dromadaires » avec oubli de « 6 hommes » avec explications partielles
ou une erreur de calcul accompagnée d'explications cohérentes
1 Découverte du nombre d'animaux seulement, 17, ou plusieurs essais, mais sans arriver à la bonne réponse
0 Incompréhension du problème

Dans la situation réelle de classe, une mise en commun est prévue après la résolution. La discussion et/ou l'examen des productions d'élèves n'aboutira pas à une attribution de points comme pour l'épreuve. Cependant, le rappel des critères ci-dessus peut illustrer la problématique de l'évaluation, par l'enseignant, de l'activité de résolution de problèmes qu'il vient d'organiser.

Quelle serait son attribution des points aux cinq copies précédentes ?

4.1. Les réactions de l'enseignant

Par exemple, comment, si vous étiez l'enseignant, réagiriez-vous devant la cinquième copie :

- vous félicitez l'élève,
- vous dites que c'est bien mais …
  … c'est trop long de devoir dessiner toutes les pattes
  … c'est plus simple de faire 68 : 4
  … ce n'est pas très sûr, on peut faire des erreurs,
- vous regardez l'élève ou le groupe avec un air amusé,
- vous demandez ce qu'en pensent les autres,
- sans aucun commentaire, vous dites : *Maintenant que tu as trouvé la solution tu vas refaire le problème avec 384 pattes et 120 bosses.*

Mais si vous regardez bien, cette cinquième copie retrace la résolution la plus simple et efficace qui soit : ce n'est pas long de compter quatre par quatre jusqu'à 68, il y a peu de risque d'erreur. Placer une bosse sur chaque groupe de 4 n'est pas difficile non plus ! Compter les 17 bosses et ajouter une seconde bosse à partir de la fin pour arriver à 23 est aussi élémentaire ! Il suffit alors de compter les six paires de bosses pour se rendre compte qu'il y a six chameaux et, par conséquent six hommes.
Inutile la division de 68 par 4, inutile la soustraction 23 – 17, inutiles les hypothèses et essais pour déterminer le nombre de chameaux !

Pour chacune de vos réactions il y aura une interprétation de l'élève qu'il mettra dans sa « mémoire affective » de l'objet « maths » :

- positive avec l'admiration, la reconnaissance, l'intérêt manifesté par l'enseignant, le défi lancé par le changement de variables,
- négative par les « oui mais » et leurs arguments douteux, ou par les sourires entendus, …

Le « oui mais » est une réaction correspondant à l'attribution de « 3 points » reçue par la plupart des copies précédemment où le nombre d'animaux (17) a été trouvé par dessin, comme la répartition des bosses, sans aucune référence à des opérations.
Elle est donc une réaction vraisemblable et on peut donc imaginer qu'elle sera reçue négativement par l'élève.

4.2. Les réactions de l'élève

Les termes « explication », « justification », « vérification », « complète », « partielle », « claire », « peu claire », font l'objet de discussions parfois vives lors de la rédaction de nos critères d'attribution des points. C'est une préoccupation d'adulte.
Ce n'est pas celle de l'élève lorsqu'il cherche à résoudre le problème.
Il y a là une source de malentendus qui peut s'illustrer par exemple par ce dialogue fictif entre un élève et l'adulte qui l'évalue.
L'enseignant : *Ton explication n'est pas très claire.*
L'élève : *Tu m'as demandé de trouver la solution, j'ai cherché, j'ai réfléchi et je suis heureux de l'avoir trouvée. Tu m'as aussi demandé d'expliquer comment je l'ai trouvée. Alors je te dis comment j'ai fait et je te fais même un dessin* (au cas où tu n'aurais pas compris).
Tu as ma réponse, il me semble qu'elle est juste, tu as mes explications. (Si ce que je te raconte ne te plaît pas, ce n'est pas mon problème, c'est le tien !)

4.3. Une synthèse provisoire

(Mod) Les modalités de résolution des problèmes lors des épreuves du RMT sont particulières. Elles sont tout à fait différentes dès qu'on se retrouve en classe.
(Eval) Les premières attributions des points ou analyses a posteriori se font sans les élèves (qui ne les connaissent pas). En classe, le maître est face à un élève qu'il connaît bien, à qui il doit justifier son évaluation, avec toutes les contraintes de l'institution (notes individuelles, transmission, calendrier …)
(Sav) C'est aussi ici qu'interviennent les exigences des programmes (inspections, examens, épreuves nationales ou régionales …)
(Aff) C'est dans ce milieu que se joue le plaisir ou le rejet des « maths » et la capacité de « résoudre des problèmes ».

Les réactions possibles du maître face à certaines procédures d'élèves ne sont qu'une approche suggérée par l'observation des copies, mais on peut encore aller plus loin dans l'anticipation du passage en classe.

5. Les savoirs attendus

Nous avons dit précédemment que les problèmes du RMT placent les élèves dans une situation caractérisée par sa nouveauté, l'indépendance, la dévolution des tâches, la coopération. Ils sont aussi conçus pour être exploités en classe dans le parcours d'apprentissage prévu et géré par le maître, sur la base des résultats obtenus lors de l'épreuve et des analyses a posteriori. Dans cette perspective, on rencontrera évidemment des notions, connaissances ou savoirs explicitement cités dans les programmes.
Nous en examinerons deux, toujours à la lecture les productions d'élèves sur les *Chameaux et dromadaires* : la division, puis la soustraction.
Ces opérations figurent dans les programmes scolaires des degrés concernés (10 à 12 ans) de tous nos pays. Elles en constituent même des notions essentielles ou « incontournables ».

5.1. La division

Dans *Chameaux et dromadaires* il s'agit de la division 68 : 4.

Une grande partie des copies arrivant à la réponse correcte la mentionnent explicitement.
Par exemple :
- *On a fait tout de suite 68 : 4 qui sont les animaux …*
- *Comme chaque chameau et chaque dromadaire a 4 pattes, on a fait 68 : 4 = 17 …*
- *Sachant que chaque animal a 4 pattes, nous avons divisé le total des pattes par 4 (c'est-à-dire les pattes par animal) et on est arrivé à 17. …*

D'autres copies, dont les cinq citées précédemment se limitent à un dessin ou à un texte :
- *Nous avons trouvé la solution en dessinant 4 pattes par animal jusqu'à arriver à 68, puis nous les avons comptées et il y en avait 17.*

D'autres, écrivent la multiplication 17 × 4 = 68, ou encore ne mentionnent pas cette opération.

L'enseignant qui voit apparaître, ou non, l'écriture *68 : 4* dans les copies de ses élèves et qui fait le lien avec le savoir « division » de son programme a plusieurs choix ou décisions à prendre lors des phases de mise en commun et d'institutionnalisation :
Faut-il proposer cette écriture, voire l'imposer, aux élèves qui ne l'ont pas fait figurer dans leur copie ? Peut-on l'exploiter didactiquement ?

La relation-clé permettant de trouver les 17 animaux traduit le contexte « les chameaux ont quatre pattes, les dromadaires aussi, et il y a 68 pattes en tout », en deux multiplications par 4, une addition et une égalité qui aboutit à l'écriture synthétique de l'adulte « algébriste » : $4c + 4d = 68$ où c et d sont les nombres respectifs de chameaux et dromadaires, encore indéterminés.
Qu'on soit enfant ou adulte, avant d'arriver à l'opération de « division » il faut être conscient que la somme des deux multiplications par quatre, $4c + 4d$, peut s'écrire ou se concevoir comme une seule multiplication par quatre : $4(c + d)$, pour atteindre l'égalité $4(c + d) = 68$, qui n'est encore qu'une « multiplication lacunaire », $4 \times \ldots = 68$, qui, finalement correspond à la division $68 : 4 = \ldots$. Deux savoirs intermédiaires s'invitent ainsi dans cette séquence de raisonnement : la distributivité de la multiplication sur l'addition, puis le fait que la multiplication et la division sont deux opérations inverses l'une de l'autre.

Pour de nombreux élèves, ce n'est plus un problème, c'est une « certitude » (savoir intériorisé à la suite de problèmes résolus antérieurement) : *On a fait tout de suite 68 : 4 qui sont les animaux.*
Pour d'autres c'est un problème, peut être facile, mais pour lequel on prend la peine de donner une justification avec la distributivité et l'opération inverse en arrière-plan : *Comme chaque chameau et chaque dromadaire a 4 pattes, on a fait 68 : 4 = 17.*
Pour d'autres encore, ce savoir n'est pas mis spontanément en action, dans cette situation (par environ 40%, d'entre eux, en catégorie 5 comme en catégorie 6) qui se contentent de dessins, ou de procédures multiplicatives.
Et enfin il semble que le savoir n'est pas vraiment disponible pour les élèves qui écrivent des divisions comme 23 : 2 ; 23 :1 ; 23 : 17 ; 68 : 2 ; 68 : 23.

Que faire de ce savoir en élaboration, à des niveaux différents dans les productions d'élèves observées, et vraisemblablement au sein d'une même classe ?

- Institutionnaliser l'écriture 68 : 4 en pensant que, en catégorie 5 et plus encore en catégorie 6, les élèves devraient faire appel naturellement à la distributivité et devraient savoir qu'une multiplication lacunaire peut être remplacée par une division. On prend alors le risque que cette institutionnalisation soit considérée comme une simple injonction du professeur à des élèves qui ne sont pas encore en mesure de s'approprier les savoirs sous-jacents ni la chaîne déductive nécessaire.

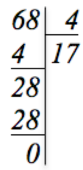
- Laisser « mûrir » ces savoirs menant à l'opération 68 : 4, et profiter de cette occasion pour insister sur la distributivité en soulignant la pertinence d'expressions comme : *les chameaux et les dromadaires ont tous quatre pattes et on calcule le nombre d'animaux à quatre pattes* … Il faut alors être conscient qu'on renonce momentanément au « programme » et qu'on devra le justifier en cas de contrôle de l'institution scolaire.

- Chercher à rendre nécessaire l'usage de la division, en proposant par exemple la variante (déjà citée) du problème avec 384 pattes et 120 bosses.

Dans chacun des cas, la décision revient à l'enseignant. Elle se situe à l'articulation entre savoir (Sav) et affectivité (Aff) car l'institutionnalisation précoce aura des effets sur le futur : confusions => automatismes aléatoires => erreurs => insécurité => craintes, …

On peut encore ajouter que, pour les élèves qui ont pensé ou choisi de trouver le nombre d'animaux par la division 68 : 4, l'opération peut s'effectuer mentalement, à la calculatrice ou à l'aide d'un algorithme.

De nombreuses copies présentent un algorithme en colonnes de ce genre :



Il s'agit ici d'un choix « automatique et mécanique » de la disposition de l'algorithme en colonne, non nécessaire lorsque le diviseur est un nombre d'un seul chiffre, qui ne diffère de l'écriture en ligne 68 : 4 = 17 que par l'adjonction explicite des deux « 28 ».
On confond parfois les « savoirs » sur la division avec son algorithme en colonnes, qui n'est, au plus, qu'une « connaissance instrumentale », variant d'une région ou d'une époque à l'autre et qui devient rapidement obsolète par l'usage de la calculatrice.

5.2. La soustraction

Lorsque le nombre d'animaux est déterminé, on peut passer à la répartition des bosses selon le contexte :
23 bosses entre 17 animaux, les uns avec une bosse, les autres avec deux bosses.
Les productions des élèves décrivent cette répartition de plusieurs manières :

- par essais plus ou moins chanceux suivis d'une vérification, par exemple :
  ... 17 animaux. 6 chameaux et 11 dromadaires
  6 × 2 bosses = 12 *11 × 1 bosse = 11*
  12 bosses + 11 bosses = 23 bosses
- par essais systématiques où les couples (chameaux ; dromadaires) sont envisagés avec le calcul des bosses correspondantes conduisant à de longues listes ordonnées du genre (1 ;16), (2 ; 15), (3 ;14) … ,
- mais aussi par raisonnement déductif, comme dans les quatre exemples suivants :
  - *... 17 animaux. Parce que si on aurait que des chameaux on aurait 34 bosses en tout alors ça veut dire qu'il y a 11 de trop. On enlève 11 chameaux et on rajoute 11 dromadaires, et après il y a 6 chameaux et 11 dromadaires ...*
  - *... Nombre de chameaux en tout : 23 bosses – 17 dromadaires = 6 chameaux ...*
  - *Opérations 68 : 4 = 17 ; 23 – 17 = 6 ; 17 – 6 = 11*
  - *Il y a 6 chameaux car s'il y a 11 chameaux il y aurait déjà 22 bosses. 22 + 6 = 28 et il n'y a que 23 bosses. Donc, il n'y a que 6 hommes.*

Les auteurs de l'analyse a priori, n'avaient pas prévu l'opération 23 – 17 = 6, ils n'avaient envisagé que les essais et une procédure hypothétique s'approchant de l'addition lacunaire 17 + … = 23 :
… Pour résoudre ce « système d'équations » on peut procéder par essais au hasard, par essais organisés progressivement, par inventaires de tous les couples dont la somme est 17, soit par déductions du genre : si tous les animaux sont des dromadaires, il y aurait 17 bosses et il en manquerait 6 ; par conséquent il faut remplacer 6 dromadaires par 6 chameaux. …

La soustraction 23 - 17 se retrouve implicitement dans les résolutions purement graphiques mais elle apparaît explicitement dans 5 à 10% des copies environ.
Dans la variante du problème (proposés précédemment) avec 384 pattes et 120 bosses, la soustraction sera la bienvenue !
La tentation est de la proposer directement aux élèves, ou même de l'institutionnaliser en fin de la mise en commun, au risque qu'elle ne soit reçue que comme un « truc » ou un « automatisme ».

Un dialogue vécu peut illustrer ce risque :
Le grand-père (GP) est curieux de connaître la maîtrise de la table d'addition par sa petite fille (M) 7 ans, 2e année d'école élémentaire :
Après quelques vérifications du genre : *2 + 2, 4 + 5, 6 + 7 ? ...*
M : *Je sais aussi faire 30 + 30 ?*
GP : *Ah oui ? Comment ?*
M : *Il suffit d'enlever les zéro, de faire 3 + 3 et de remettre un zéro après.*
GP : *Et combien ça fait ?*
M : *Ben ... 16 !*
GP : *??*
M : *Non, ça fait 60 !*
GP : *Oui, c'est juste. C'est toi qui a trouvé ce truc ?*
M : *Non c'est la maîtresse qui nous l'a donné.*

La maîtresse de M, a, dans son programme « l'extension aux dizaines du répertoire additif ».
En langage mathématique, il s'agit de
$30 + 40 = 3 \times 10 + 4 \times 10 = (3 + 4) \times 10 = 7 \times 10 = 70$
qui fait appel à la décomposition en produits de 30 et 40, à la distributivité de l'addition sur la multiplication, au répertoire additif et à la multiplication par 10.
M. a retenu le « truc » mais elle ne peut comprendre la disparition des deux zéros et la réapparition d'un seul des deux au moment de donner la réponse.
Quand elle arrivera à la multiplication il est probable que, pour 30×40 elle obtiendra 120 !

Le recours aux modèle des « dizaines » est meilleur : 30 + 40 c'est 3 dizaines + 4 dizaines, donc 7 dizaines. Mais il repose aussi sur la distributivité et, pour la multiplications l'obstacle se situera au niveau du « produit de dizaines » où interviendront encore la commutativité et l'associativité.

5.3. Des procédures enseignées aux procédures réfléchies

Les quelques réflexions précédentes sur les deux opérations-clé du problème *Chameaux et dromadaires* soulèvent l'importance des choix et décisions de l'enseignant lors de la conduite d'une mise en commun et de la phase d'institutionnalisation qui la suit.
Nous avons vu que, pour ce problème,
- diviser 68 par 4, évite de dessiner tous les groupes, ou de compter de 4 en 4 jusqu'à 68, ou de penser à une multiplication ou à des additions répétées ou à des soustractions successives ;
- soustraire le nombre d'animaux au nombre de bosses, évite les essais de répartition, les dessins ou les divisions inadéquates.

Ces deux procédures permettent d'arriver à la solution de manière efficace. Elles seront valables aussi pour des variantes du problème avec de plus grands nombres. L'analyse a posteriori des copies montre qu'elles sont déjà adoptées par certains groupes d'élèves, qui les ont intériorisées. Elles leur permettent de gagner du temps et les engagent dans le passage à la généralisation puis à l'entrée en algèbre. On peut considérer qu'elles sont devenues des procédures qu'on peut considérer comme abouties ou réfléchies ou encore « expertes », dans le sens où elles sont reconnues comme économiques, synthétiques et efficaces.
Pour d'autres élèves, elles ne sont qu'en voie de construction ou, encore, elles ne sont pas ressenties comme nécessaires car il y a d'autres moyens d'arriver à la solution.
L'enseignant sait que les procédures « expertes » sont un des objectifs à faire atteindre à ses élèves et, par conséquent, il est tenté de les « enseigner » ; c'est-à-dire de montrer comment faire, d'expliquer la méthode, de demander de s'y conformer.
Si les élèves ne sont pas encore en mesure de participer eux-mêmes, comme le montreront les erreurs décrites dans le chapitre suivant, cette procédure « enseignée » prématurément risque ainsi, de s'ajouter à toutes les précédentes pour constituer le tissu sur lequel se développe l'incompréhension, puis l'échec, l'incapacité et finalement le rejet des maths.

La résolution de problèmes est un révélateur du niveau de construction de nombreux concepts reconnus comme « compétences » selon la terminologie actuelle des programmes qui les supposent « acquises » à la fin du « cycle X » de la scolarité.
Plutôt que de « enseigner » ne faut-il pas profiter de l'occasion pour reprendre ces concepts dont l'élaboration est encore inachevée et de faire un bout de chemin avec l'élève vers une maîtrise améliorée des savoirs rencontrés ?

Les choix de l'enseignant sont délicats et il vaut la peine de revenir à nos critères décrits précédemment :
(Sav) La priorité n'est pas au savoir scolaire, mais à l'endroit où en est l'élève dans son parcours d'apprentissage.
(Eval) On diagnostique, on constate, on évalue le niveau d'un savoir, au travers des productions des élèves, mais on ne le juge pas.
(Mod) La coopération offre des bonnes conditions pour stimuler le processus d'apprentissage.
(Aff) L'absence de jugement négatif, le respect des procédures de chacun devraient contribuer à donner une image positive des maths.

5.4. Les échecs

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici aux procédures et savoirs qui permettent d'arriver à la solution du problème *Chameaux et dromadaires.* Il est temps de regarder les obstacles et difficultés observées lors de l'analyse a posteriori des productions des élèves.
40 à 50% des groupes ont trouvé une autre réponse que « 6 hommes » lors de l'épreuve du RMT. Ce sera aussi le cas en classe, vraisemblablement, si le problème est donné dans des conditions requises : par groupes, sans intervention du maître avant d'aborder la première mise en commun, sans la crainte d'une sanction ou jugement négatif.
Voici quelques traces de productions qui n'aboutissent pas à la réponse correcte :
- Cléopâtre a dessiné en tout 17 hommes. Nous avons fait 68, qui sont les pattes en tout, divisé par 4 qui sont les pattes de chaque chameau et dromadaire et le résultat est 17.
- 8 chameaux, 7 dromadaires, 2 hommes.
Pour arriver à la solution nous avons divisé 68 qui sont les pattes au total par 4 qui donne le total de tous les animaux et des bosses.
- 68 : 4 = 17 animaux ; 23 – 3 = 20 ; 20 : 2 = 10 chameaux et hommes.
- On a calculé seulement les bosses … on a divisé 23 par 2 pour trouver les bosses, ce qui fait 11 avec un reste de 1 et ce reste est la bosse du dromadaire. Donc il y a 11 hommes sur les chameaux parce qu'il y a 11 chameaux.
- On a divisé les pattes par 2 (68 :2 = 34 personnes) qui sont les personnes que Cléopâtre a dessinées sur le dos de chaque chameau.
- Dati: 13 = gobbe; 68 = zampe; 1 = uomo su ogni cammello
Risoluzione: C'è un dato mancante: n. dei cammelli e dei dromedari che non ci permette di risolvere il problema.
(Trad. *Données : 13 = bosses ; 68 = pattes ; 1 = homme sur chaque chameau*
Résolution : Il manque une donnée : n. des chameaux et des dromadaires qui ne permet pas de résoudre le problème.

Tous ces exemples ont été obtenus en respectant les quatre critères sur les savoirs, l'évaluation, le climat affectif et, plus particulièrement, la modalité de travail de groupe sous la responsabilité de la classe, sans aide extérieure.
On peut donc s'étonner que, après 50 minutes de travail commun, de deux à quatre élèves, avec un éventuel contrôle d'autres groupes, puissent arriver à de telles conclusions.
Il faut savoir cependant que sous l'expression « travail par groupes » on trouve une grande variété de modalités dont en particulier :
- groupes formés préalablement par l'enseignant selon ses critères de répartition des élèves ;
- groupes formés de manière autonome, et non imposés, au sein desquels on échange et collabore ;
- groupes ouverts, adaptables, mobiles, qui coopèrent avec d'autres groupes,
- ensemble d'élèves assis à une même table, lisant l'énoncé chacun pour soi, sans en parler entre eux, sans communiquer, laissant à l'un d'entre eux le soin de rédiger la réponse.
Ce sont peut-être des « groupes » fonctionnant selon cette dernière modalité qui sont arrivés aux conclusions ci-dessus et ce ne sont certainement pas uniquement des lacunes au niveau des savoirs mathématiques qui sont responsables de ces échecs.
Mais on « n'enseigne » pas la coopération et l'autonomie, on la cultive, et ça demande du temps !

6. Synthèse et conclusions

Pour cette synthèse, nous nous permettons de citer quelques extraits de G. de Vecchi[2] à l'appui de nos critères (Eval) et (Aff)
Abandonner progressivement les modes d'évaluation traumatisants qui, chez certains enfants, détruisent la confiance dans leurs capacités, et éliminent leur désir d'apprendre…
Donner à l'erreur un statut positif, en la considérant comme un indicateur d'obstacle à renverser, sans lui faire porter le poids d'un jugement négatif.
Proscrire les notes, et les moyennes qui cachent les véritables raisons des réussites ou des échecs, en les remplaçant par des évaluations différenciées et ajustées à chaque élève pour lui permettre de mesurer ses progrès et le chemin qui lui reste encore à parcourir.

Le rejet et la peur des maths, que ressent une partie importante des adultes et des élèves, se développent à l'école. C'est donc à l'école qu'il faut agir pour remédier cette image négative des maths.
Notre expérience du RMT nous montre que nos élèves, et aussi leurs parents, aiment résoudre des problèmes de mathématiques, dans des conditions particulièrement favorables.
Les analyses a posteriori des productions d'élèves nous montrent aussi que la résolution de problèmes permet une évaluation différenciée lorsqu'on comprend ce que l'élève nous raconte comment il arrive, ou n'arrive pas, à la solution.

Lorsqu'on se retrouve en classe, pour une exploitation didactique de nos problèmes, les contraintes de l'institution scolaire imposent un programme, des certifications individuelles (notes) une gestion du temps et des apprentissages différenciés, … Mais il est cependant possible de préserver certaines conditions favorables aux apprentissages dans le domaine des mathématiques, pour autant :
- qu'on observe le niveau effectif de construction des connaissances dans les productions des élèves, indépendamment des programmes,
- qu'on laisse les élèves s'exprimer, chercher, et se tromper aussi sans vouloir résoudre le problème à leur place,
- qu'on s'abstienne rigoureusement de les juger négativement.
Ce n'est pas simple, c'est même très difficile, mais c'est seulement à ce prix qu'on peut espérer éloigner la peur et laisser la place au plaisir de chercher et de découvrir des relations, des propriétés, des savoirs qui participent de l'apprentissage des mathématiques.

[2] G. de Vecchi, in Café pédagogique, septembre 2008 :

LES IMPLICITES DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : EXEMPLE DES EXTRATERRESTRES[1]

Pauline Lambrecht[2]

Mots clés : Résolution de problèmes, énoncés, implicites, analyse *a priori*

Lors de la 23e édition du RMT, les réponses et illustrations des élèves à la dixième question de la première épreuve ont mené les correcteurs de la section belge à de beaux éclats de rire mais également à la reconsidération de l'attribution des points, qui faisait suite à l'analyse *a priori* du problème.
Il s'agit du problème « Extra-terrestres » repris ci-dessous. Il était à destination des élèves des catégories 5 à 8.

EXTRA-TERRESTRES (23e RMT-I-10)
Sur une lointaine planète vivent cinq créatures étranges : ET_1, ET_2, ET_3, ET_4 et ET_5 qui se reconnaissent à trois caractéristiques :
- une antenne,
- une trompe,
- une queue.

Chacune des cinq créatures a au moins une des caractéristiques, certaines ont deux caractéristiques, aucune n'a les trois caractéristiques.
On sait que:
- ET_2 a une antenne ;
- ET_3 a une queue mais ET_1 n'en a pas ;
- ET_1 et ET_5 n'ont pas de trompe ;
- les cinq créatures sont toutes différentes,
- au total on compte trois trompes, deux queues et trois antennes.

Indiquez quelles sont les caractéristiques (antenne, trompe, queue) de ET_4.
Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

La réponse attendue, prévue par l'analyse *a priori* de ce problème, est que ET_4 n'a qu'une trompe. En effet, une procédure pour y parvenir est d'utiliser un tableau à double entrée et de le remplir en fonction des informations disponibles dans l'énoncé.
Les indications « ET_2 a une antenne », « ET_3 a une queue mais ET_1 n'en a pas » et « ET_1 et ET_5 n'ont pas de trompe », ainsi que « au total on compte trois trompes, deux queues et trois antennes » permettent de commencer le tableau.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne		1				3
trompe	0				0	3
queue	0		1			2

L'énoncé indique que « chacune des cinq créatures a au moins une des caractéristiques ». On en déduit que ET_1 a une antenne. Ensuite, vu qu'il y a trois trompes, on en attribue une à ET_2, ET_3 et ET_4.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1				3
trompe	0	1	1	1	0	3
queue	0		1			2

Aucune des créatures n'ayant les trois caractéristiques, nous pouvons affirmer que ET_2 n'a pas de queue et que ET_3 n'a pas d'antenne.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	0			3
trompe	0	1	1	1	0	3

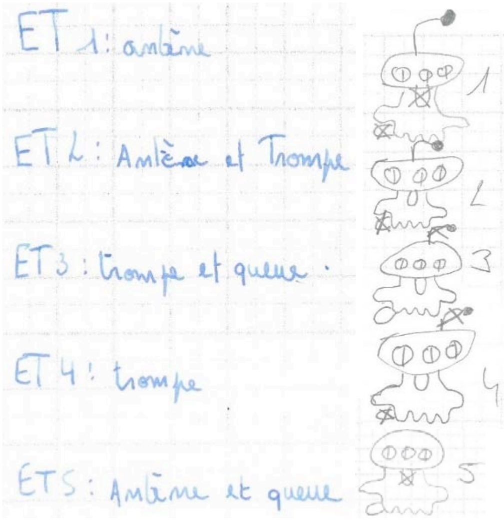
[1] Article paru dans *Losanges*, 36 (revue de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française), 2017.
[2] CREM

queue	0	0	1		2

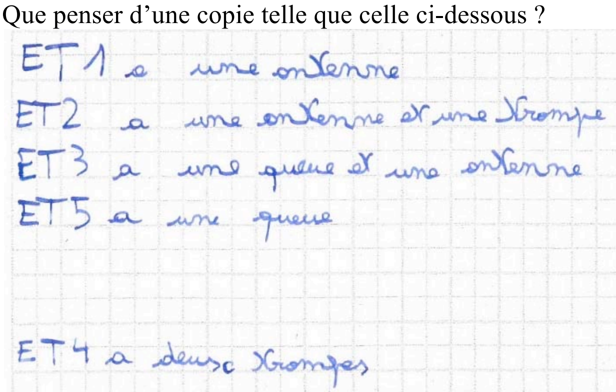
Il reste alors à répartir une antenne et une queue entre ET_4 et ET_5. Après s'être rendu compte que ET_4 ne peut avoir ces deux caractéristiques car il a déjà une trompe, prenons une autre condition formulée dans l'énoncé : « les cinq créatures sont toutes différentes ». Entendons par là qu'elles sont toutes composées de triplets différents de caractéristiques. Il n'est donc pas possible d'ajouter une queue à ET_4 car cette créature serait identique à ET_3. De même, il n'est pas possible de lui ajouter une antenne car elle aurait les mêmes attributs que ET_2. Nous devons dès lors attribuer à ET_5 la dernière antenne et la dernière queue.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	0	0	1	3
trompe	0	1	1	1	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

Il est maintenant possible d'indiquer les caractéristiques de ET_4 (une trompe), comme l'illustre une des classes belges ayant participé au concours.



Cette réponse semble être une solution unique au vu de la procédure suivie.
Cette analyse *a priori* et la répartition de points qui y correspond ont été bousculées lors de la correction des copies de certaines classes. Que penser d'une copie telle que celle ci-dessous ?


ET1 a une antenne
ET2 a une antenne et une trompe
ET3 a une queue et une antenne
ET5 a une queue
ET4 a deux trompes

Le contexte d'extraterrestres aidant, l'imagination débordante des élèves les a incités à ne pas se priver de considérer plusieurs caractéristiques d'une même sorte par créature.
Il faut admettre que la proposition de ce groupe d'élèves répond aux indications et conditions du problème. L'analyse *a priori* présentée plus haut a, en fait, exploité une information implicite : chacune des créatures n'aurait au maximum qu'une seule caractéristique de chaque sorte.
Cette donnée n'est pas explicitée dans l'énoncé. Tel qu'il est écrit, l'énoncé laisse la possibilité d'y lire qu'il existe trois types de caractéristiques, que chaque créature en a au moins une, que certains extraterrestres en ont deux – du même type ou non – et que aucune créature n'a les trois types de caractéristiques. Notons que le texte indique qu'aucune créature n'a « les » trois caractéristiques, ce qui sous-entend « les trois types de caractéristiques ». Il se pourrait donc que des extraterrestres soient pourvus de trois attributs, dont deux ou trois d'une même sorte.

À partir de cette relecture de l'énoncé, il est possible d'imaginer d'autres solutions. C'est dès le moment où on a décidé d'attribuer une antenne à ET_1, et une trompe à ET_2, ET_3 et à ET_4 que les possibilités peuvent être plus larges. Recommençons donc le raisonnement.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne		1				3
trompe	0				0	3
queue	0		1			2

À partir des informations reprises dans ce tableau, il est nécessaire d'attribuer au moins une antenne à ET_1. Il faut désormais envisager la possibilité où cette créature en aurait deux, ce qui n'est pas habituel dans de tels tableaux. Si c'est le cas, ET_3, ET_4 et ET_5 ne peuvent avoir d'antenne car il n'y en a que trois en tout.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	2	1	0	0	0	3
trompe	0				0	3
queue	0		1			2

ET_5 hérite alors d'une queue (au moins une caractéristique, deux queues en tout) et ET_2 et ET_4 ne peuvent en avoir dans cette configuration.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	2	1	0	0	0	3
trompe	0				0	3
queue	0	0	1	0	1	2

Il reste alors trois trompes à répartir entre ET_2, ET_3 et ET_4. Ce dernier en a au moins une (chaque créature a au moins une caractéristique), ET_3 aussi (pas deux créatures identiques), ce qui nous amène à trois configurations qui répondent à l'énoncé :

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	2	1	0	0	0	3
trompe	0	1	1	1	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	2	1	0	0	0	3
trompe	0	0	2	1	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

et

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	2	1	0	0	0	3
trompe	0	0	1	2	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

Afin de trouver d'autres solutions, repartons des informations initiales :

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne		1				3
trompe	0				0	3
queue	0		1			2

Nous avons attribué deux antennes à ET_1, recommençons le raisonnement avec une seule. Si c'est ET_3 qui a la troisième antenne, ET_4 et ET_5 n'en ont pas. ET_5 a alors une queue pour les mêmes raisons qui ont été mentionnées plus haut (au moins une caractéristique, deux queues en tout). ET_2 et ET_4 n'ont alors pas de queue.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	1	0	0	3
trompe	0				0	3
queue	0	0	1	0	1	2

ET_3 ne peut avoir de trompe car aucune des créatures n'a les trois caractéristiques. Il reste à distribuer les trois trompes entre ET_2 et ET_4. Sachant que ET_4 en a au moins une, on trouve deux nouvelles répartitions possibles :

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	

Antenne	1	1	1	0	0	3
trompe	0	2	0	1	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

et

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	1	0	0	3
trompe	0	1	0	2	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

la dernière correspondant à celle de la copie qui est l'une de celles qui ont bousculé l'analyse *a priori*.
Si ce n'est pas ET_3 qui a la troisième antenne mais ET_4, il n'y a pas de configuration répondant à l'énoncé (nous laissons au lecteur le soin de le découvrir). Il reste à attribuer la dernière antenne à ET_5 pour tenter d'obtenir une ou plusieurs répartitions différentes.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	0	0	1	3
trompe	0				0	3
queue	0		1			2

La deuxième queue doit être attribuée à ET_5 car, sans cela, cette créature serait composée de manière identique à ET_1, ce qui ne se peut.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	0	0	1	3
trompe	0				0	3
queue	0	0	1	0	1	2

Afin d'éviter d'avoir des créatures composées de manière identique et de respecter la condition d'avoir au moins une caractéristique, trois configurations sont à nouveau possibles :

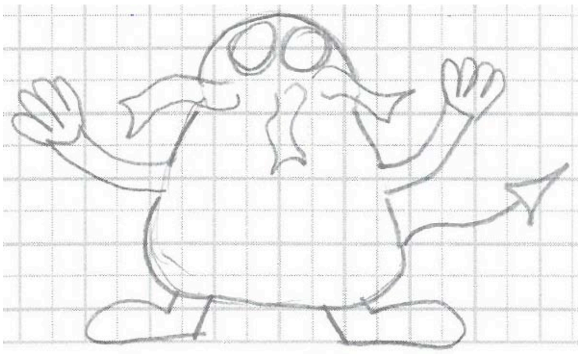
	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	0	0	1	3
trompe	0	2	0	1	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	0	0	1	3
trompe	0	1	0	2	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

et

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenne	1	1	0	0	1	3
trompe	0	1	1	1	0	3
queue	0	0	1	0	1	2

qui correspond à la répartition proposée en début d'article.
Elle apparaissait comme unique lors d'une première analyse du problème alors que cette configuration se révèle être l'une des huit répartitions possibles qui répondent à l'énoncé. Elles mènent par contre à seulement deux solutions distinctes relativement à l'apparence de ET_4 : une ou deux trompes.
Cet exemple nous encourage à ne pas nous précipiter dans des déductions parfois fondées sur des habitudes ou des implicites. Dans ce cas, ce sont des regards d'enfants qui ont permis d'ouvrir le champ des possibles.
Pour le plaisir, clôturons sur cette sympathique image d'un extraterrestre proposée par l'une des classes belge ayant participé au RMT.



GLI IMPLICITI NELLA RISOLUZIONE DI PROBLEMI:

L'ESEMPIO DEGLI EXTRA-TERRESTRI[1]

Pauline Lambrecht[2]

Parole-chiave: risoluzione di problemi, enunciati, impliciti, analisi *a priori*

Durante le correzioni degli elaborati della prima prova della 23esima edizione del RMT, le risposte e le illustrazioni degli allievi al problema dieci hanno dato luogo a simpatiche risate da parte dei correttori della sezione belga, ma hanno anche condotto ad una risistemazione dell'attribuzione dei punteggi.
Si tratta del problema "Extra-terrestri", destinato ad allievi delle categorie da 5 a 8.

EXTRA-TERRESTRI (CAT. 5, 6, 7, 8)

In un lontanissimo pianeta vivono cinque strane creature: ET_1, ET_2, ET_3, ET_4 e ET_5 che si riconoscono da tre caratteristiche:

- un'antenna
- una proboscide
- una coda.

Ognuna delle cinque creature possiede almeno una di queste caratteristiche, alcune di loro ne hanno due, nessuna di loro le ha tutte e tre.
Si sa che:

- ET_2 ha un'antenna;
- ET_3 ha la coda, invece ET_1 non ce l'ha;
- ET_1 e ET_5 non hanno la proboscide;
- le cinque creature sono tutte diverse;
- in tutto si contano tre proboscidi, due code e tre antenne.

Indicate quali sono le caratteristiche (antenna, proboscide, coda) di ET_4.
Spiegate come avete fatto a trovarle.

La risposta attesa, prevista dall'analisi a priori di questo problema, è che ET_4 ha solo una proboscide. Una procedura per trovare questa risposta consiste nell'utilizzare una tabella a doppia entrata e nel riempirla in funzione delle informazioni dell'enunciato.
Le indicazioni "ET2 ha un'antenna", "ET3 ha la coda, invece ET1 non ce l'ha", "ET1 e ET5 non hanno la proboscide", e ancora che "in tutto si contano tre proboscidi, due code e tre antenne" permettono di cominciare a introdurre dei dati nella tabella:

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna		1				3
proboscide	0				0	3
coda	0		1			2

L'enunciato precisa che "ognuna delle cinque creature possiede almeno una di queste caratteristiche". Se ne deduce che ET_1 ha un'antenna. Poi, visto che ci sono tre proboscidi, se ne attribuisce una ciascuno a ET_2, ET_3 e ET_4.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1				3
proboscide	0	1	1	1	0	3
coda	0		1			2

Poiché nessuna delle creature ha le tre caratteristiche, possiamo affermare che ET_2 non ha la coda e che ET_3 non ha l'antenna.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	0			3

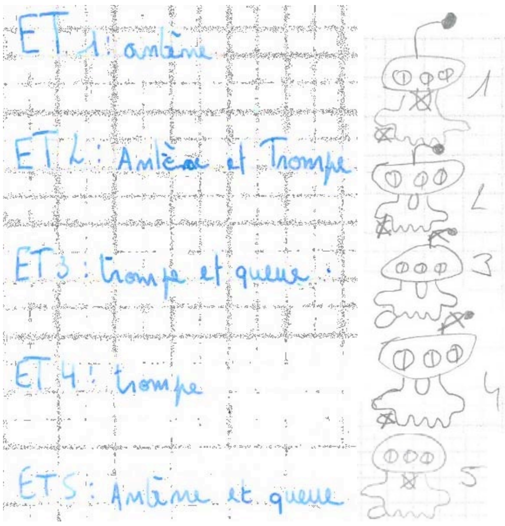
[1] Articolo pubblicato in *Losanges*, 36 (revue de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française), 2017.
[2] CREM

proboscide	0	1	1	1	0	3
coda	0	0	1			2

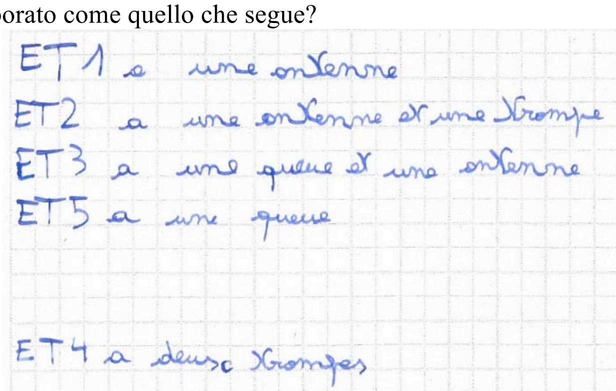
Resta allora da decidere a chi attribuire l'ultima antenna e l'ultima coda tra ET_4 e ET_5. Dato che a ET_4 non possono essere assegnate entrambe queste caratteristiche, in quanto ha già una proboscide, si prende in considerazione un'altra condizione dell'enunciato: "le cinque creature sono tutte diverse", intendendo con ciò che sono composte tutte da triplette con caratteristiche differenti; non è pertanto possibile aggiungere a ET_4 né una coda, altrimenti questa creatura sarebbe identica a ET_3, né un'antenna perché in questo caso avrebbe le stesse caratteristiche di ET_2.
Bisogna allora attribuire a ET_5 sia l'ultima antenna che l'ultima coda.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	0	0	1	3
proboscide	0	1	1	1	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

E' ora possibile indicare le caratteristiche di ET_4 (una proboscide), come è illustrato in un elaborato di una classe belga:



Questa risposta sembra comportare l'unicità della soluzione, vista la procedura seguita.
L'analisi a priori e l'attribuzione dei punteggi corrispondente sono state tuttavia messe in discussione all'atto della correzione degli elaborati di alcune classi.
Che cosa pensare di un elaborato come quello che segue?



Il contesto degli extra-terrestri e la grande immaginazione hanno portato alcuni degli allievi a non privarsi della voglia di attribuire più di una caratteristica di uno stesso tipo a qualche creatura.
Dobbiamo ammettere che anche questa soluzione risponde alle indicazioni e alle condizioni del problema.
L'analisi a priori presentata più sopra ha, in effetti, utilizzato un'informazione implicita: ogni creatura avrà al massimo una sola caratteristica di ciascun tipo.
Questo dato non è esplicitato nell'enunciato. Così com'è scritto, l'enunciato la lascia la possibilità di leggervi che esistono tre tipi di caratteristiche, che ogni creatura ne ha almeno una, che alcune ne hanno due – dello stesso tipo o no – e che nessuna creatura ha i tre tipi di caratteristiche.

Va notato infatti che anche l'indicazione "nessuna di loro le ha tutte e tre", cosa che sottintende "i tre tipi di caratteristiche" non impedisce di pensare che alcuni extra-terrestri siano provvisti di tre attributi, due o tre dello stesso tipo.
A partire da questa rilettura dell'enunciato é possibile trovare altre soluzioni. Ed è proprio per il fatto che si è deciso di attribuire un'antenna a ET_1, e una proboscide a ET_2, ET_3 e a ET_4 che le possibilità possono essere maggiori. Ricominciamo a considerare il ragionamento.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna		1				3
proboscide	0				0	3
coda	0		1			2

Seguendo le informazioni dell'enunciato, riprese in questa tabella, è necessario attribuire almeno un'antenna a ET_1. Passiamo ora a considerare la possibilità che questa creatura abbia due antenne, diversamente da ciò che è stato fatto nelle precedenti tabelle. In questo caso, ET_3, ET_4 et ET_5 non possono avere antenne in quanto ve ne sono solo tre in tutto.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	2	1	0	0	0	3
proboscide	0				0	3
coda	0		1			2

ET_5 "eredita" allora una coda (almeno una caratteristica, due code in tutto), ET_2 e ET_4 non possono dunque averne in tale configurazione.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	2	1	0	0	0	3
proboscide	0				0	3
coda	0	0	1	0	1	2

Restano allora da ripartire le tre proboscidi tra ET_2, ET_3 e ET_4.
Quest'ultimo ne ha almeno una, ET_3 anche (non due creature identiche), ci sono quindi tre configurazioni che rispondono all'enunciato:

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	2	1	0	0	0	3
proboscide	0	1	1	1	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	2	1	0	0	0	3
proboscide	0	0	2	1	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

e

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	2	1	0	0	0	3
proboscide	0	0	1	2	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

Per trovare altre soluzioni, ripartiamo dalle informazioni iniziali:

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna		1				3
proboscide	0				0	3
coda	0		1			2

Nell'ipotesi precedente abbiamo attribuito due antenne a ET_1; ricominciamo il ragionamento con una sola. Se è ET_3 ad avere la terza antenna, ET_4 e ET_5 non ne hanno.
ET_5 ha allora una coda per le medesime ragioni menzionate più sopra (ameno una caratteristica, due code in tutto). ET_2 e ET_4 allora non hanno la coda.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	1	0	0	3
proboscide	0				0	3
coda	0	0	1	0	1	2

ET_3 non può avere proboscidi in quanto nessuna creatura ha le tre caratteristiche. Resta da attribuire le tre proboscidi tra ET_2 e ET_4.
Sapendo che ET_4 ne ha almeno una, troviamo due possibili ripartizioni:

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	1	0	0	3
proboscide	0	2	0	1	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

e

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	1	0	0	3
proboscide	0	1	0	2	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

L'ultima corrisponde a quella di uno degli elaborati che hanno messo in crisi l'analisi a priori.
Se non è ET_3 che ha la terza antenna, bensì ET_4, non ci sono configurazioni rispondenti all'enunciato. Lasciamo ai lettori scoprirne la ragione.
Resta solo da attribuire l'ultima antenna a ET_5 per tentare di ottenere una o diverse ripartizioni differenti.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	0	0	1	3
proboscide	0				0	3
coda	0		1			2

La seconda coda deve essere attribuita a ET_5 perché altrimenti questa creatura sarebbe composta in maniera identica a ET_1, cosa che non si può fare.

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	0	0	1	3
proboscide	0				0	3
coda	0	0	1	0	1	2

Al fine di evitare di avere creature composte nello stesso modo e di rispettare la condizione di avere almeno una caratteristica, sono di nuovo possibili tre configurazioni:

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	0	0	1	3
proboscide	0	2	0	1	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

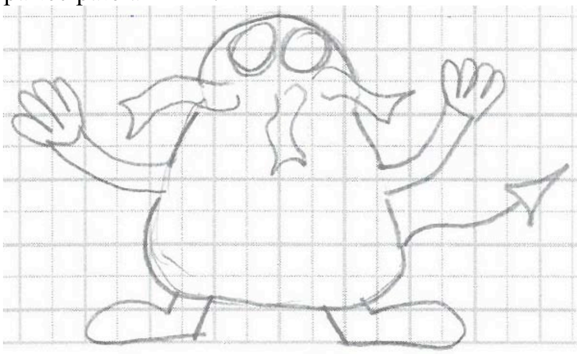
	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	0	0	1	3
proboscide	0	1	0	2	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

e

	ET_1	ET_2	ET_3	ET_4	ET_5	
antenna	1	1	0	0	1	3
proboscide	0	1	1	1	0	3
coda	0	0	1	0	1	2

Quest'ultima corrisponde alla ripartizione proposta all'inizio dell'articolo, quella che sembrava essere l'unica possibile ad una prima analisi del problema mentre in effetti si rivela essere una delle otto ripartizioni possibili che rispondono all'enunciato.
Esse portano però a due sole soluzioni distinte a seconda che ET_4 abbia una o due proboscidi.

Tutto ciò ci induce a riflettere sulla necessità di non essere precipitosi nell'effettuare deduzioni talvolta fondate su abitudini o impliciti.
In questo caso, sono stati gli sguardi dei bambini che hanno permesso di ampliare il campo delle possibilità.
Per il nostro e vostro piacere, chiudiamo con questa simpatica immagine di un extra-terrestre proposta da una delle classi belghe che hanno partecipato al RMT.



I GENITORI TORNANO SUI BANCHI DI SCUOLA

M. Agostina Satta e Rosanna Sanna[1]

Premessa

Siamo un gruppo di insegnanti della sezione ARMT di Sassari che da diversi anni partecipano con le proprie classi alla gara e che, nell'ambito della proposta didattica, ricorrono, unitamente alla metodologia e alla discussione matematica, alle risorse costituite dai problemi del RMT, che ben favoriscono lo sviluppo e la trattazione di temi matematici curricolari.

Nell'Istituto Comprensivo n° 2 di Porto Torres, dove insegniamo, l'entusiasmo che la maggior parte degli allievi ha sempre manifestato per il Rally ha finito per incuriosire i genitori, meravigliati del fatto che i loro figli fossero così coinvolti nell'affrontare dei problemi di matematica. E così, dalle chiacchierate fatte con padri e madri, è nata l'idea, che via via ha preso corpo, di dare vita al Rally dei Genitori. Lanciata quasi come una divertente provocazione, la nostra proposta è stata invece accolta con grande interesse dalle famiglie dei nostri alunni.

Il guanto della sfida è stato raccolto, e nell'anno scolastico 2016/17 è nato il Progetto **"Matematicainsieme**", che ha portato all'organizzazione del 1° Rally Matematico Genitori.

Il nostro scopo era quello di:

- Favorire un'interconnessione e una cooperazione tra scuola e famiglia.
- Rendere consapevoli i genitori dell'importanza dell'attività didattica incentrata sul "Problem Solving".
- Far scoprire e apprezzare le potenzialità del lavoro di gruppo cooperativo.
- Permettere ai genitori di accedere al ruolo di mediatori attivi rispetto alle attività didattiche svolte dai loro figli in classe.

Per favorire la comunicazione e la condivisione di informazioni in relazione ai problemi di allenamento da svolgere a casa e ai procedimenti risolutivi, è stata creata una classe virtuale mediante la piattaforma EDMODO e una Mailing-List dei genitori iscritti.

---

[1] Sezione ARMT di Sassari

Svolgimento dell'attività

L'attività ha avuto luogo in tre incontri sinteticamente riassunti:

1° Incontro

- Presentazione delle finalità del Rally matematico e delle modalità di svolgimento dell'iniziativa.
- Suddivisione, per estrazione, in due classi "di colore" (i gialli – i verdi) ciascuna formata da 23 genitori

2° Incontro

Prova di simulazione condotta con le stesse modalità seguite dagli alunni.

Suddivisione autonoma dei genitori di ciascuna classe in gruppi da tre/quattro

- Distribuzione dei sette problemi tratti dalle edizioni precedenti del RMT
- Svolgimento della prova (50 min.)
- Correzione prova



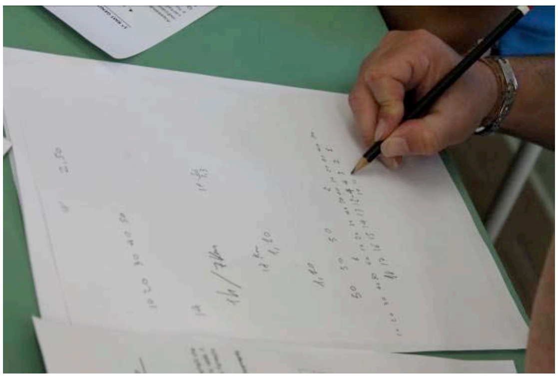

3° Incontro – Prova Finale

- Suddivisione autonoma dei genitori di ciascuna classe in gruppi da tre/quattro
- Distribuzione dei sette problemi tratti dalle edizioni precedenti del RMT
- Svolgimento della prova (50 min.)
- Distribuzione e compilazione, di un questionario per sondare il proprio coinvolgimento.
- Correzione prova (con la collaborazione di altri insegnanti)
- Alla conclusione della prova è stato somministrato il questionario sotto riportato e consegnati gli attestati di partecipazione, gli attestati per la classe vincitrice e i gadget.


Analisi

Sono stati scelti problemi tenendo conto sia delle competenze mobilizzate (geometriche, aritmetiche, algebriche, logiche…), sia del livello (dalla categoria 5 fino alla categoria 10), privilegiando quelli stimolanti per "studenti adulti".
A posteriori possiamo dire che i sette problemi proposti, ad eccezione del problema "Mattonelle D'Oro" cat. 10 (24° RMT Prova II 2016), sono stati risolti in modo corretto, e in linea di massima in maniera ben argomentata. Per ciò che riguarda questo problema l'approccio risolutivo è risultato corretto ma la risposta è stata incompleta, forse per mancanza di tempo.

Le strategie risolutive adottate sono state diverse: tentativi organizzati, metodo grafico, utilizzo di formule matematiche e, in qualche caso, strategie algebriche.



Osservazioni

Durante le prove, ogni gruppo ha lavorato con impegno, con entusiasmo e in modo collaborativo. Due aspetti in particolare ci hanno colpito: la discussione matematica sui problemi tra i diversi componenti dei vari gruppi dopo la conclusione delle prove e la passione con cui sono state "rintracciate" insieme le possibili soluzioni.

Analisi del questionario

Dalla compilazione del questionario somministrato alla conclusione della Prova Finale ai 46 genitori, 22 uomini e 24 donne con un'età media di 45 anni, in possesso prevalentemente del Diploma di Scuola Secondaria di secondo grado, riportiamo alcune risposte significative:

1. **Esprima la sua opinione sui problemi del Rally Matematico**

I genitori hanno espresso i seguenti giudizi:
"I problemi sono interessanti, avvincenti, creativi, a volte impegnativi ma in linea di massima risolvibili, ottimi per tenere deste le nostre menti prese da altre problematiche. Alcuni problemi sono apparsi difficili, ma molto appassionanti, intriganti e stimolanti sul profilo intellettivo".

2. **Esprima il suo vissuto rispetto a questa esperienza**

Dalle risposte si evince che l'esperienza è stata accolta con curiosità, come un momento di condivisione delle esperienze vissute dai propri figli, ed è stata accolta come una proposta stimolante, giocosa e ottima occasione per rivedere vecchi compagni di classe e stringere nuove amicizie sui banchi di scuola. Ad eccezione di un genitore, hanno trovato emozionante risolvere problemi attraverso un lavoro di equipe.

3. **Sarebbe interessato/a a ripetere l'esperienza? Perché?**

Tutti concordano che l'esperienza debba essere ripetuta in quanto la passione trascinante dei professori ha reso l'iniziativa divertente, istruttiva e aggregante. Hanno espresso anche l'opinione che questa occasione rappresenta un modo diverso e inusuale per vivere la scuola da genitori.

4. **Qual è stato il suo rapporto con la matematica durante il percorso scolastico?**

Rispetto a questa domanda 10 genitori su 46 affermano che il rapporto con la matematica non è stato idilliaco soprattutto nella Scuola Secondaria di secondo grado, mentre tutti gli altri hanno espresso parere positivo.

Conclusione

Questa prima edizione sperimentale del Rally Matematico genitori ha riscosso un successo ben al di là delle nostre aspettative e ha suscitato curiosità anche in altre scuole del nostro territorio, che hanno preannunciato l'intenzione di aderire a tale iniziativa, che nell'anno scolastico 2017/18 sarà ripetuta in modo più articolato e strutturato. Dalle risposte alla 4° domanda si evince che quasi tutti i partecipanti amano la matematica, perciò la sfida per la 2^{a} edizione sarà quella di individuare delle strategie per riuscire a coinvolgere anche quei genitori che ritengono di non essere "bravi" in matematica.

Problemi proposti nella prova finale

N° 1 "I COMPLEANNI" (Cat. 6, 7, 8) Prova II 2017- 25^ ARMT -2017

N° 2 "PIRAMIDI BICOLORI" (Cat. 6, 7, 8, 9) Finale 24 ARMT -2016

N° 3 "UN RETTANGOLO IN PEZZI" (Cat. 8, 9, 10) Prova II - 24 ARMT -2016

N° 4 "UNA DOMENICA IN BICICLETTA" (Cat. 9, 10) Prova II - 24 ARMT -2016

N° 5 "TRIANGOLI BIZZARRI" (Cat.9, 10) Prova II -24 ARMT -2016

N° 7 "I NUMERI POLIGONALI" (Cat. 10) Finale 24 ARMT 2017

N° 6 "LE MATTONELLE D'ORO" (Cat. 10) II Prova 24^ ARMT- 2016

LES PARENTS RETOURNENT SUR LES BANCS D'ÉCOLE

M. Agostina Satta et Rosanna Sanna[1]

Avant-propos

Nous sommes un groupe d'enseignants de la section ARMT de Sassari qui participent au concours depuis plusieurs années avec leur propre classe et qui, dans le cadre de cette proposition didactique, recourent à la fois à la méthodologie et à la discussion mathématique, aux ressources constituées des problèmes de RMT, qui favorisent bien le développement et le traitement de thèmes mathématiques du programme.

Dans *l'Istituto Comprensivo n° 2* de Porto Torres où nous enseignons, l'enthousiasme que la majorité des élèves a toujours manifesté pour le Rallye a fini par intriguer les parents, étonnés du fait que leurs enfants s'impliquent autant dans la résolution de problèmes de mathématiques. Et ainsi, à la suite de propos échangés avec mères et pères, l'idée d'un Rallye des parents a pris corps peu à peu. Lancée quasi comme une provocation ludique, notre proposition a été accueillie avec un très grand intérêt par les familles de nos élèves.

Le gant du défi a été relevé et, au cours de l'année scolaire 2016/17, est né le projet « **Mathématiques ensemble** », qui a conduit à l'organisation du 1^{e} Rallye Mathématique des Parents.

Notre but était de

- Favoriser une interconnexion et une coopération entre école et famille.
- Rendre conscients les parents de l'importance de l'activité didactique centrée sur le « Problem Solving ».
- Faire découvrir et apprécier les potentialités du travail en groupe coopératif.
- Permettre aux parents d'accéder au rôle de médiateur actif concernant les activités didactiques menées par leurs enfants en classe.

Pour favoriser la communication et le partage d'information en rapport avec les problèmes d'entraînement à résoudre à la maison et aux procédures de résolution, une classe virtuelle a été créée sur la plateforme EDMODO ainsi qu'une Mailing-List des parents inscrits.

---

[1] Section ARMT de Sassari

Déroulement de l'activité

L'activité s'est déroulée sur trois rencontres, décrites de manière synthétique :

1e Rencontre

- Présentation des finalités du Rallye mathématique et des modalités de déroulement de l'initiative.
- Répartition des parents, par tirage au sort, en deux classes « de couleurs » (les jaunes – les verts) chacune formée de 23 parents d'élèves.

2e Rencontre

Epreuve de simulation proposée avec les mêmes modalités que pour les enfants.

Répartition autonome des parents de chaque classe en groupes de trois/quatre personnes.

- Distribution des sept problèmes tirés des éditions précédentes du RMT
- Déroulement de l'épreuve (50 min.)
- Correction de l'épreuve

3e Rencontre – Épreuve finale

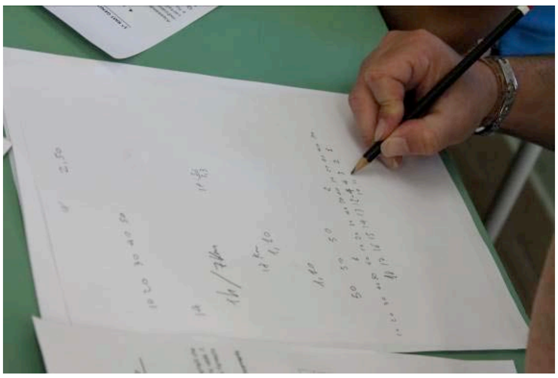
- Répartition autonome des parents de chaque classe en groupes de trois/quatre personnes
- Distribution des sept problèmes tirés des éditions précédentes du RMT
- Déroulement de l'épreuve (50 min.)
- Distribution et remplissage d'un questionnaire pour évaluer leur propre engagement.
- Correction de l'épreuve (avec la collaboration d'autres enseignants)
- À la fin de l'épreuve, les attestations de participation, celles pour la classe gagnante et quelques gadgets ont été distribués.

Analyse

Les problèmes ont été choisis en tenant compte tant des compétences mobilisées (géométriques, arithmétiques, algébriques, logiques …), que du niveau scolaire (de la catégorie 5 à la catégorie 10), en privilégiant les plus stimulants pour « étudiants adultes ».

A posteriori nous pouvons dire que les sept problèmes proposés, à l'exception du problème « Carrelage en or » cat. 10 (24e RMT.II. 2016), ont été résolus correctement dans l'ensemble et de manière généralement bien argumentée. En ce qui concerne le problème « Carrelage en or » la démarche de résolution était correcte mais la réponse incomplète, peut-être par manque de temps.

On a observé une grande variété de stratégies de résolution : essais organisés, méthodes graphiques, usage de formules mathématiques et, dans quelques cas, stratégies algébriques.



Observations

Durant les épreuves, chaque groupe a travaillé avec engagement et enthousiasme, de manière collaborative. Deux aspects nous ont frappé en particulier : la discussion mathématique des problèmes entre les membres des différents groupes après les épreuves et la passion avec laquelle les solutions possibles ont été retrouvées.

Analyse du questionnaire

De la compilation du questionnaire remis à la fin de l'épreuve finale aux 46 parents, 22 hommes et 24 femmes avec un âge moyen de 45 ans, en possession principalement d'un diplôme d'école secondaire de second degré, nous reportons quelques réponses significatives :

5. **Exprimez votre opinion sur les problèmes du Rallye Mathématique**

Les parents ont exprimé les jugements suivants :
« Les problèmes sont intéressants, captivants, créateurs, parfois prenants mais en principe résolubles, excellents pour tenir éveillés nos esprits occupés par tant d'autres problématiques. Quelques problèmes sont ressentis difficiles, mais très passionnants, intrigants et stimulants intellectuellement ».

6. **Exprimez votre vécu par rapport à cette expérience**

Les réponses montrent que l'expérience a été accueillie avec curiosité, comme un instant de partage des expériences vécues par ses propres enfants. Elle a été reçue comme une proposition stimulante, ludique et une excellente occasion pour revoir d'anciens camarades de classe et nouer de nouveau liens d'amitié sur les bancs d'école. À une exception près, les parents ont trouvé émouvant de résoudre des problèmes par un travail d'équipe.

7. **Seriez-vous intéressé(e) à renouveler l'expérience ? Pourquoi ?**

Tous estiment que l'expérience devrait être répétée et que l'enthousiasme convaincant des professeurs a rendu l'initiative amusante, instructive et agrégeante. Ils ont aussi trouvé que cette occasion représente une manière nouvelle et inusitée de vivre l'école de parents.

8. **Quel a été votre rapport aux mathématiques au cours de votre scolarité ?**

A cette question 10 parents sur 46 affirment que leur rapport avec les mathématiques n'a pas été idyllique, surtout à l'école secondaire du second degré, alors que tous les autres ont exprimé un avis positif.

Conclusions

Cette première édition expérimentale du Rallye Mathématique des Parents a obtenu un succès bien au-delà de nos espérances et a suscité beaucoup de curiosité. D'autres écoles de notre circonscription nous ont dit leur intention de participer à cette initiative qui, lors de la prochaine année scolaire 2017/18 sera répétée de manière plus structurée. Des réponses à la 4e question il est évident que tous les participants aiment les mathématiques et donc, le défi de la 2e édition sera de déterminer la manière de réussir à convaincre aussi les parents qui se sentent « nuls » en mathématiques.

Problèmes proposés pour l'épreuve finale

N° 1 *Les anniversaires* (Cat. 6, 7, 8) 25 RMT.II.12 -2017

N° 2 *Pyramides bicolores* (Cat. 6, 7, 8, 9) 24 RMT.F.13 - 2016

N° 3 *Un rectangle en morceaux* (Cat. 8, 9, 10) 24 RMT.II.15 - 2016

N° 4 *Un dimanche a bicyclette* (Cat. 9, 10) 24 RMT.II.16 - 2016

N° 5 *Drôles de triangles* (Cat.9, 10) 24 RMT.II.18 - 2016

N° 7 *Nombres polygonaux* (Cat. 10) 24 RMT.F.20 - 2017

N° 6 *Carrelage en or* (Cat. 10) 24 RMT.II.19 - 201

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

LE TEMPS DES VENDANGES

Michel Henry, Angela Rizza

Pour le Groupe Fonctions[1]

Identification

Rallye : 14.II.14
Catégories : 7, 8, 9, 10
Domaine conceptuel : fonctions, mise en équations, étude d'un système d'équations linéaires

Résumé

Trouver les différentes manières d'obtenir le couple (18 ; 13) par addition de trois types de couples (3 ; 2), (2 ; 1) et (1 ; 1) dans un contexte de transports de deux types de récipients par trois transporteurs (système linéaire de deux équations à 3 inconnues entières et strictement positives).

Énoncé du problème

Dans les vignes de M. Brunello, un jour de vendanges, avec le raisin recueilli on a rempli 18 grandes cuves et 13 cuves moyennes. Pour les transporter à la cave, M. Brunello dispose de trois tracteurs :
- le tracteur A peut transporter, à pleine charge, 3 grandes cuves et 2 moyennes ;
- le tracteur B peut transporter, à pleine charge, 2 grandes cuves et 1 moyenne ;
- le tracteur C peut transporter, à pleine charge, 1 grande cuve et 1 moyenne ;

Ce jour-là, M Brunello a utilisé au moins une fois tous ses tracteurs et toujours à pleine charge.

Combien de voyages peut avoir fait M. Brunello avec chacun de ses tracteurs pour transporter toutes les cuves à la cave ?

Décrivez tous les voyages possibles et expliquez comment vous les avez trouvés.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Pour les catégories considérées on peut envisager différents types de procédures. Dans tous les cas l'utilisation de la proportionnalité pour le calcul du nombre de cuves convoyées par un tracteur lors de plusieurs allers-retours est un prérequis. La prise en compte des nombreuses contraintes est également incontournable.

a. Une procédure possible : identification d'un problème relevant d'une mise en équation algébrique dont une méthode de résolution peut être anticipée. Identification des inconnues du problème (par exemple a, b et c les nombres respectifs de voyages des tracteurs A, B et C), des contraintes sur ces inconnues (entiers strictement positifs) et des relations qui les lient ($3a + 2b + c = 18$ et $2a + b + c = 13$). Mise en œuvre d'une méthode de résolution adaptée, par exemple, obtenir par différence $a + b = 5$ et retenir les solutions en nombres entiers naturels différents de 0 : (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2) (4 ; 2). Chaque couple permet de déterminer la valeur correspondante de c (respectivement 7, 6, 5, 4). On obtient ainsi quatre possibilités.

Remarque : il est possible de réduire la recherche :
- en s'appuyant sur le sens et en prenant en compte que les tracteurs font au moins un voyage. On est amené à faire un travail équivalent à la résolution de $3a' + 2b' + c' = 12$ et $2a' + b' + c' = 9$ ce qui limite le nombre de cas à étudier.
- en travaillant sur l'aspect syntaxique et en déduisant des équations que $a + b$ doit être égal à 5. On peut difficilement envisager que cette déduction survienne sans recours au cadre algébrique.

b. Autre procédure possible : procéder dans le champ multiplicatif et additif, avec des entiers, de manière organisée (éventuellement avec un tableau) en tenant compte des caractéristiques de chaque tracteur et du nombre de cuves transportées augmentant avec le nombre de voyages. Commencer par exemple en choisissant le nombre maximum de voyages du tracteur A, s'assurer que 6 voyages ne peuvent convenir, que 5 peuvent permettre de transporter les 18 grandes cuves mais alors pas les 13 moyennes (on aurait transporté 18 grandes cuves et 12 moyennes, ce qui ne suffit pas).
Puis supposer que le tracteur A fait 4 voyages (12 GC ; 8MC) et il faut alors tester toutes les possibilités pour les tracteurs B et C. On obtient ainsi une première solution : 4 voyages pour A, 1 pour B et 4 pour C.

[1] Le groupe "Fonctions" qui a analysé ce problème dans le cadre de la rencontre ARMT de Luxembourg en 2013, était composé de Lucia Argilla, Maria Cristina Bonomi, Sandro Deplano, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Ana Paula Jahn, Francesca Ricci, Angela Rizza.

Et ainsi de suite jusqu'à obtenir les trois autres solutions : 3 voyages pour A, 2 pour B et 5 pour C, puis 2 voyages pour A, 3 pour B, 6 pour C et 1 voyage pour A, 4 pour B et 7 pour C.

c. Déterminer une solution (par essais), obtenir les autres en observant qu'un voyage de A équivaut à un de B et un de C, s'assurer de l'exhaustivité.

Ainsi on peut essayer de distinguer deux types de savoirs mobilisables :

- d'une part ceux liés au cadre des équations linéaires.
- d'autre part ceux liés à l'aspect fonctionnel.

Pour ces derniers on peut distinguer deux aspects :

a) la nécessaire mise en œuvre d'un raisonnement relevant de la proportionnalité pour le calcul du nombre de cuves convoyées par un tracteur lors de plusieurs allers-retours.

b) l'utilisation en actes d'une ou deux fonctions de plusieurs variables. Le calcul des images se faisant dans le champ additif et multiplicatif sur des entiers.

Mots-clés

Fonction, relations algébriques, relations fonctionnelles, proportionnalité, systèmes d'équations linéaires

Points attribués

Sur 550 classes de 9 sections ayant participé à l'épreuve II du 14e RMT

Points attribués	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Nb classes*	*m*
Catégorie 7 (en %)	42	30	13	11	5	240	1,08
Catégorie 8 (en %)	28	34	15	12	11	196	1,45
Catégorie 9 (en %)	30	32	14	7	18	88	1,52
Catégorie 10 (en %)	15	31	12	19	23	26	2,04
Ensemble	34	32	14	11	10	550	1,32

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Réponse correcte (les 4 possibilités : 4 voyages pour A, 1 pour B et 4 pour C ; 3 voyages pour A, 2 pour B et 5 pour C ; 2 voyages pour A, 3 pour B et 6 pour C ; 1 voyage pour A, 4 pour B et 7 pour C) bien argumentée

3 Découverte de trois possibilités correctes avec justifications

2 Découverte de deux possibilités avec justifications
ou trois correctes et une ou plusieurs possibilités erronées

1 Une seule possibilité et/ou essais ou raisonnements qui attestent d'une compréhension initiale du problème

0 Incompréhension du problème

Globalement ce problème a donc été très moyennement réussi, y compris en catégorie 10.

Procédures, obstacles et erreurs relevées

Parmi les copies ayant 0 point on peut percevoir que la compréhension de l'énoncé et son appropriation s'avèrent très difficiles. La multiplicité des contraintes à prendre en compte et certaines formes syntaxiques semblent s'ériger en obstacles. On identifie ainsi des classes qui ont séparé le problème en trois : combien de trajets avec le tracteur A pour transporter la totalité des cuves, puis avec le tracteur B puis avec le C. D'autres classes n'ont pas envisagé que les tracteurs étaient toujours à pleine charge, d'autres encore n'ont pas tenu compte du fait que chaque tracteur faisait au moins un trajet. On reconnaît ici à la fois des difficultés de traitement de l'énoncé et aussi une difficulté à gérer un ensemble trop important de contraintes.

Les procédures utilisées par les classes s'étant engagées dans la recherche sont globalement des procédures par essais assez peu souvent organisés et relevant de démarches arithmétiques. Les rares démarches organisées sont peu productives, on ne voit ni tableau bien structurés, ni listes pertinentes (sauf en catégorie 10). On observe par ailleurs des procédures figuratives, où les élèves représentent les cuves par des barres de différentes tailles (y compris en catégorie 9). La plupart de ces copies donnent des solutions correctes en organisant des groupements. On reconnaît ainsi des procédures souvent utilisées dans les niveaux inférieurs et a contrario, même au niveau 8, 9 ou 10, n'apparaît aucune procédure algébrique.

Il est à noter que pour les niveaux observés et pour les copies qui permettent l'analyse, la question de la proportionnalité ne pose pas de difficulté.

Exploitations didactiques

L'utilisation de ce problème en classe peut se faire avec des objectifs variés.

On peut tout d'abord le mettre en œuvre comme un problème de recherche sans objectifs notionnels mais en travaillant de façon principale les compétences métamathématiques[2]. On cherche alors à développer autant des savoir-faire en résolution de problème qu'une attitude et un rapport aux mathématiques favorables à ces résolutions de problèmes.

On peut aussi viser des objectifs notionnels.

Deux semblent possibles :

1. la mise en évidence d'un aspect fonctionnel, au sens où le nombre de cuves transportées dépend de trois variables (le nombre de trajet de chacun des tracteurs). On peut alors, lors de la synthèse après une recherche minimale, étudier l'ensemble des valeurs prises par la fonction (les variables sont ici entières et bornées) en organisant convenablement la recherche des images.
2. une introduction (ou réintroduction) de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes de ce type. Compte tenu des résultats obtenus ici, l'outil algébrique n'est clairement pas disponible pour les élèves considérés, et il peut alors intervenir, après élaboration de solutions erronées ou partielles ou laborieuses, comme nouvel outil qui permet l'obtention de toutes les solutions plus efficacement. La situation se trouve alors être une situation-problème au sens de Régine Douady et doit permettre un nouvel apprentissage.

Dans tous les cas, quel que soit l'objectif, il est nécessaire que les élèves puissent réellement s'engager dans la résolution du problème et envisager ce qu'en est une solution.

Pour cela, et puisque le cadre d'une situation de classe avec l'enseignant le permet, il s'avère nécessaire de faire un travail sur l'énoncé et son appropriation. Le vocabulaire et les formulations doivent être explicitées si nécessaire, les ambiguïtés levées, l'ensemble des contraintes mises en évidence et ceci afin que l'ensemble de la communauté de recherche soit d'accord sur le problème à résoudre.

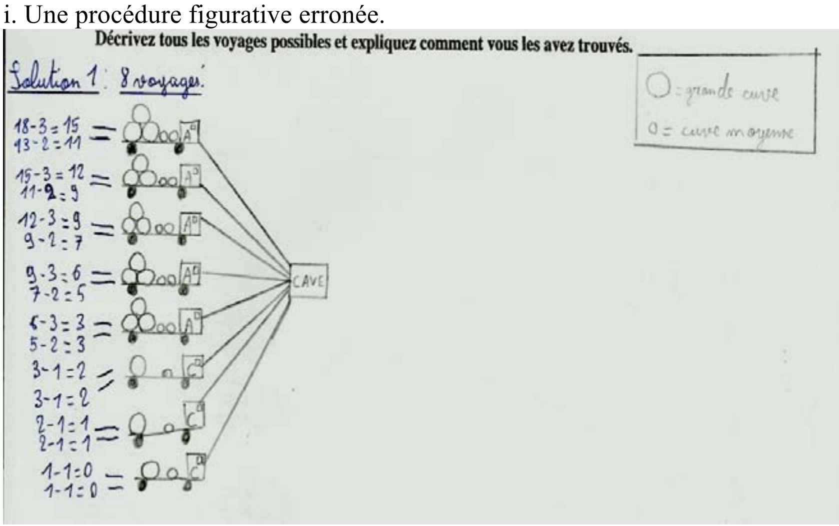
Ceci étant réalisé, les productions déjà recueillies montrent que les élèves doivent pouvoir s'engager dans la recherche et produire des raisonnements qui pourront être exposés puis débattus. La diversité des pistes observées permet d'envisager la possibilité de synthèses diverses suivant les objectifs poursuivis.

Pour aller plus loin

A. Comme il a été dit précédemment, les procédures mises en œuvre dans le cadre d'épreuves du rallye ne sont pas algébriques. Ceci n'empêche pas leur diversité et la finesse de certaines. Nous en présentons ici quelques-unes.

a. Procédures utilisant des représentations et des essais figuratifs.

i. Une procédure figurative erronée.

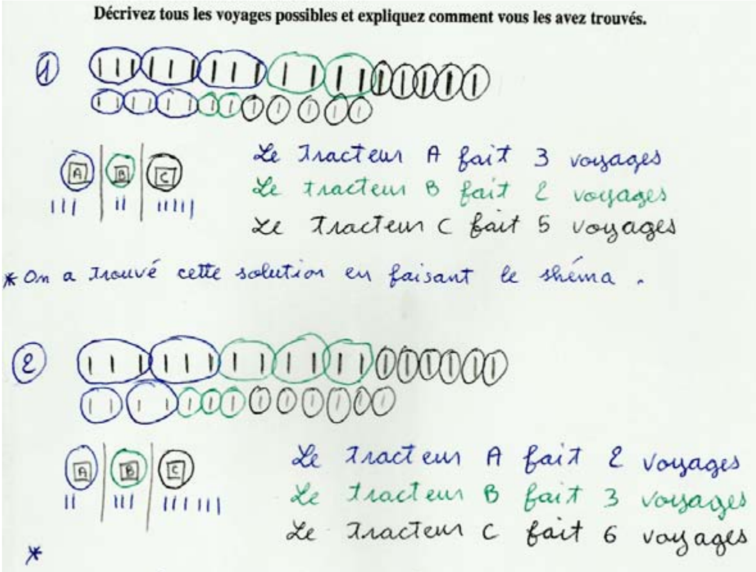


On a ici une représentation de la situation et une procédure rappelant au début celle d'une division. Lorsqu'il est impossible de poursuivre avec le tracteur A (sinon le tracteur C ne serait pas à pleine charge), on poursuit avec le tracteur C. Ici la contrainte sur le tracteur B est oubliée.

ii. Une procédure figurative, en catégorie 8, incomplète mais qui permettra d'obtenir 3 solutions sur 4.

---

[2] Pour les objectifs précis et la mise en œuvre on renvoie aux travaux de l'IREM de Lyon et à (Arsac et Mante 2007) et (Exprime 2010).



b. Des élèves qui « réduisent le problème »

- On sait que M. Brunello à utilisé au moin une fois tout les tracteurs. Donc, on additionne les charges des tracteurs A, B et C, ce qui donne donc :

$3+2+1=6$
$2+1+1=4$

Il reste alors 6 grandes cuves et 4 moyennes cuves à transporter.

$18-6=12$
$13-4=9$

Il reste 12 grandes cuves et 9 mayennes cuves à transporter.

Méthode n° ① :

grandes cuves :	moyennes cuves :
A = 3	2
B = 2	1
C = 1	1

- Je calcule les grandes cuves :
$5\times1+2\times2+1\times3=5+4+3=12$
$12-12=0$
Il a emmené toutes les grandes cuves.
- Je calcule les moyennes cuves :
$5\times1+2\times1+1\times2=5+2+2=9$
$9-9=0$
Il a emmené toutes les moyennes cuves.

En dehors d'une erreur par la suite, mais qui ne portera pas à conséquence, ces élèves mettront en œuvre une démarche correcte et obtiendront deux solutions sur 4.

Plus globalement, il est à noter que les élèves qui ont pris rapidement en compte le fait que chaque tracteur avait fait un voyage, ont globalement mieux réussis.

Bien entendu cela peut se comprendre dans le sens ou ceux qui ont produit ce premier raisonnement sont peut-être ceux qui se sont le mieux appropriés la situation mais il est aussi probable que cette « réduction » du problème, en réduisant la taille des nombres et donc le nombre de cas à étudier facilite l'organisation des essais et les raisonnements.

ii. En considérant des « équivalences » entre l'utilisation des différents tracteurs :

Voyage 1 : 8×A + 3×B + 6×C = 19 grandes et 13 moyennes.
Voyage 2 : 3×A + 2×B + 5×C = 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 3 : 1×A + 4×B + 7×C = 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 4 : 4×A + 1×B + 4×C = 18 grande et 13 moyenne.
Car A = B+C = 3 grandes et 2 moyennes.
Donc il suffit à chaque fois de rajouter un A et d'enlever 1B et 1C ou le contraire : enlever 1A et rajouter un B et 1C.

La démarche permet alors d'obtenir facilement les autres solutions quand on en connaît une. L'exhaustivité de la démarche n'est pas toujours clairement explicitée.

c. D'autres procédures rencontrées qui s'appuient essentiellement sur une répartition des cuves transportées soit par augmentation transport après transport pour arriver à 18 grandes cuves et 13 moyennes, soit par diminution :

1er Réponse :
On commence avec : 18 et 13 Les cuves de Mr Brunello
On enlève un Tracteur A : 13-2=11
18-3=15 11-1=10
Un tracteur B :
15-2=13 10-1=9
Un tracteur C :
13-1=12
Un tracteur B : 9-1=8
12-2=10 8-2=6
Un tracteur A :
10-3=7 6-1=5
Un tracteur C :
7-1=6 5-1=4
Un tracteur B :
6-2=4
4 tracteurs C : 4-4=0
4-4=0

Il sera 11 voyages :
2 voyages avec ses 3 tracteurs, un tracteur D et 4 tracteurs C.

De façon générale après les premières étapes de calcul, les élèves proposent un ajustement qui permet de respecter les contraintes pour les derniers voyages mais l'ajustement est rarement explicité.

d. On peut également observer en catégorie 9 des écritures laissant apparaître une idée de fonctions de la variable (nombre de grandes cuves, nombre de moyennes cuves) :

Le possibilità sono:

4a + 1b + 4c = (12, 8) + (2, 1) + (4, 4) = 18 g, 13 m

3a + 2b + 5c = (9, 6) + (4, 2) + (5, 5) = 18 g, 13 m

2a + 3b + 6c = (6, 4) + (6, 3) + (6, 6) = 18 g, 13 m

1a + 4b + 7c = (3, 2) + (8, 4) + (7, 7) = 18 g, 13 m

Non ci sono altre possibilità di scomposizione

Mais la justification des solutions reste inégale.

e. Il faut attendre la catégorie 10 pour obtenir les premières justifications de l'exhaustivité des solutions obtenues : « *Nous avons procédé par essais en donnant à A une valeur croissante et en calculant le nombre de tracteur*s *qui restent* » et encore :

NON È POSSIBILE TROVARE ALTRE SOLUZIONI PERCHÉ UNA AUMENTA (IL TRATTORE A) E LE ALTRE DIMINUISCONO (I TRATTORI B E C), QUINDI IL VALORE PIÙ BASSO DEVE ESSERE "UNO" PER FA SÌ CHE I TRATTORI SIANO A PIENO CARICO.

IL NUMERO DEI VIAGGI LO ABBIAMO TROVATO PER TENTATIVI.

Il n'est pas possible de trouver d'autres solutions parce que l'une augmente (le tracteur A) et les autres diminuent (les tracteurs B et C), donc la valeur la plus petite doit être « un » pour que les tracteurs soient à pleine charge.

Nous avons trouvé le nombre de voyages par des essais.

ou :

Ci siamo accorti che facendo B + C = A.
Abbiamo trovato una combinazione che andava bene:

1A + 4B + 7C.

Nous nous sommes aperçu qu'en faisant B + C = A nous avons trouvé une combinaison qui allait bien

Usando la formula di prima abbiamo aggiunto una A e quindi tolto sia una B, che una C.

Ecco tutte le combinazioni possibili:

1A + 4B + 7C

2A + 3B + 6C

3A + 2B + 5C

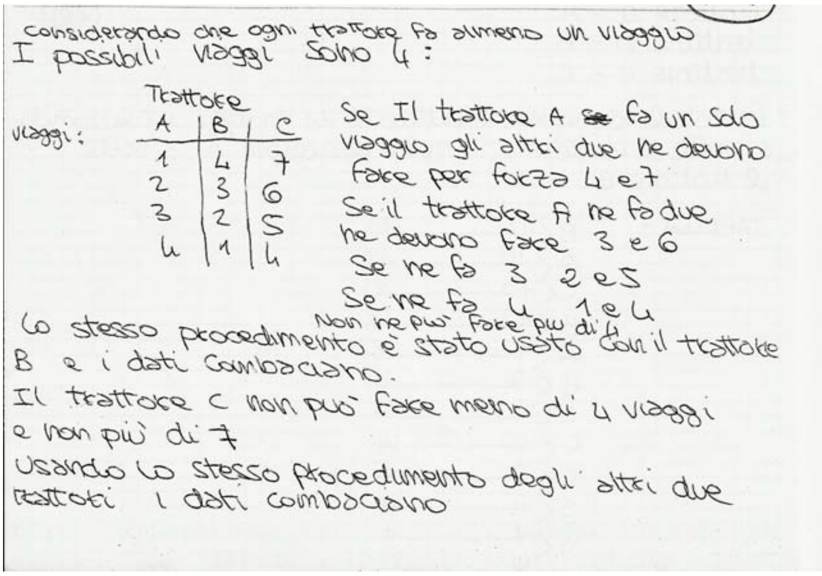
4A + 1B + 4C

Utilisant la première formule, nous avons ajouté un A et donc retiré soit un B soit un C.
Voici toutes les combinaisons possibles :

Il n'y a pas d'autres combinaisons possibles, puisque nous sommes passés par la méthode pour trouver B

Non sono possibili altre combinazioni perché andando avanti con il metodo trovato, sparirebbe B.

Et des raisonnements de plus en plus convaincants :


considerando che ogni trattore fa almeno un viaggio
I possibili viaggi sono 4:

viaggi:	Trattore A	B	C
	1	4	7
	2	3	6
	3	2	5
	4	1	4

Se Il trattore A ~~se~~ fa un solo viaggio gli altri due ne devono fare per forza 4 e 7
Se il trattore A ne fa due ne devono fare 3 e 6
Se ne fa 3 2 e 5
Se ne fa 4 1 e 4
Non ne può fare più di 4
Lo stesso procedimento è stato usato con il trattore B e i dati combaciano.
Il trattore C non può fare meno di 4 viaggi e non più di 7
Usando lo stesso procedimento degli altri due trattori i dati combaciano

Nous considérons que chaque tracteur a déjà fait un voyage
Il y a 4 possibilités de voyages :
Soit le tracteur A fait un seul voyage et les deux autres devront en faire 4 et 7
Soit le tracteur A en fait deux ils devront en faire 3 et 6
Soit il en fait 3, 2 et 5
Soit il en fait 4, 1 et 4
Il ne peut pas en faire plus de 4
La même procédure a été employée avec le tracteur B et les données coïncident.
Le tracteur C ne peut pas faire moins de 4 voyages et pas plus de 7
Utilisant la même procédure pour les deux autres tracteurs, les données coïncident

B. Une situation similaire.

On peut croiser les éléments obtenus par cette étude avec les travaux de Patrick Gibel. Il a proposé dans ses travaux de recherche en didactique des mathématiques une situation s'appuyant sur un problème mathématique proche. Il s'agit de la situation « ski à Gourette ». Le contexte proposé est celui d'une sortie de ski et de l'étude du coût des forfaits. Cette situation était proposée en CM2 (Brousseau, Gibel 2002, Gibel 2007).

Énoncé du problème :

Une journée de ski à Gourette est organisée samedi pour les élèves du canton d'Oloron. Le conseil général décide pour cet événement exceptionnel de leur offrir les forfaits pour la journée. La station de Gourette propose les tarifs suivants : 216 forfaits : 1275 F ; 36 forfaits : 325 F ; 6 forfaits : 85 F
979 enfants sont inscrits, mais au moment du départ, il y 12 absents, malades bien sûr.
Le comptable du Conseil Général se dit « Dommage pour ces petits, mais ce n'est pas grave : et puis la dépense sera moins élevée ». Qu'en penses-tu ?

Sous la forme proposée il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire mais on retrouve de nombreuses caractéristiques du problème *Le temps des vendanges* (14.II.14), dont le fait de devoir gérer une fonction de trois variables, ce qui interdit toute représentation dans l'espace plan (et exclut les méthodes graphiques) et complique nettement l'utilisation de tableaux (qui ne sont plus à deux entrées !).
Il est de plus clair que ce problème présente aussi de nombreuses difficultés qui sont pour certaines incontournables, et par exemple :

- comprendre la référence sociale et commerciale de la situation,
- identifier les grandeurs en jeu et repérer celles qui sont en relation de proportionnalité.
- percevoir en particulier que, pour chaque tarif, le nombre de lots est proportionnel au prix à payer mais qu'il n'y a pas, sous la contrainte implicite de minimisation des coûts, proportionnalité entre nombre de forfaits et prix à payer.
- comprendre que pour répondre à la question il est nécessaire de calculer deux coûts minimaux (qu'il faudra savoir déterminer) et de les comparer.

Patrick Gibel a expérimenté et rendu compte dans le détail de cette l'expérimentation (Gibel 2007).
Il est à alors à noter que :

- l'énoncé ne permet pas aux élèves de déterminer la situation objective. L'implicite de l'énoncé sur la non proportionnalité est rarement levé, nombreux sont les groupes qui élaborent des modèles erronés.
- la dévolution est difficile. Les élèves ne s'approprient pas suffisamment le problème pour en percevoir tous les enjeux. L'aspect optimisation est mal compris par une grande partie d'entre eux.
- ce n'est pas tant au niveau technique calculatoire qu'au niveau du raisonnement que les difficultés apparaissent. Une dévolution différente semble donc nécessaire pour entrer dans la complexité de la situation. Dans l'article, (Gibel 2007), l'auteur relève que les échanges après recherche sont difficiles et que les arguments sont plus souvent de l'ordre rhétorique que sémantique. Il présente des conclusions claires et explicite plusieurs raisons pour lesquelles l'expérimentation a été un échec pour une grande partie des élèves, et en particulier :

> “The study shows that although the students, faced with a problem situation elaborated and conducted by the teacher, have certainly produced forms of reasoning, they have not made much progress in their practice of reasoning. Indeed, they have not reflected back on their reasoning, on its validity, relevance or adequacy because the teacher was not able to process it. He could not respond to this reasoning by logical arguments based on the objective situation; he was forced to use rhetorical means. Now, it is not the complexity of the students' reasoning that forced the teacher to use this type of means but the fact that the problem situation could not be devolved to the students. This implies that it is not the teacher's management of the whole class presentation and discussion of the students' work that is challenged here, but rather the nature itself of the situation set up by the teacher, which strongly constrains the possibilities of really taking into account the students' reasoning.”[3]

et encore :

> “If a situation provides the teacher with the possibility of devolving to the students an "autonomous" (or "self-contained") situation of action, then, according to the theory of didactical situations in mathematics, during the phase of analysis of students' solutions the teacher can refer to the objective situation. This is because the students can develop their personal strategies and forms of reasoning related to the situations with which they are confronted. The teacher does not have to have recourse to rhetorical didactical means to process students' forms of reasoning.[4]

On retrouve ainsi une même difficulté à entrer dans la signification de la situation objective. Cette difficulté ne peut être dépassée par de simples effets rhétoriques que l’enseignant pourrait mettre en œuvre. Il s’agit donc dans les deux cas de concevoir un dispositif qui permette une véritable appropriation et une entrée dans la signification.

On peut alors conclure sur la nécessité de proposer des problèmes de recherche qui permettent une véritable dévolution et pour lesquels il peut être fait référence à un milieu objectif qui donne tout son sens à la situation et aux échanges qui pourront s’instaurer. Et au-delà du problème mathématique proposé, la réflexion sur le dispositif didactique à mettre en place en fonction des élèves concernés et des savoirs visés reste une étape fondamentale.

Bibliographie

Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren CRDP de Lyon.

Brousseau, G. & Gibel, P. (2002), Influence des conditions didactiques sur l’apparition, l’usage et l’apprentissage des raisonnements en classe, dans *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* ARDM et IREM Paris 7.

EXPRIME (2010). *Expérimenter des problèmes innovant en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP

Gibel, P. (2007) Analysis of the teachers’s arguments used in the didactical management of a problem solving situation, CERME 5.

---

[3] Traduction libre : L'étude montre que, bien que les élèves, confrontés à une situation problématique élaborée et menée par l'enseignant, aient certainement produit des formes de raisonnement, ils n'ont pas fait beaucoup de progrès dans leur pratique du raisonnement. En effet, ils ne sont pas revenus sur leur raisonnement, sur sa validité, sa pertinence ou son adéquation parce que l'enseignant n'a pas été en mesure de le permettre. Il ne pouvait pas répondre à ce raisonnement par des arguments logiques basés sur la situation objective, il a été forcé d'utiliser des moyens rhétoriques. Et, ce n'est pas la complexité du raisonnement des élèves qui a forcé l'enseignant à utiliser ce type de moyens, mais le fait que la situation ne peut être dévolue aux élèves. Cela implique que ce n'est pas la gestion de l'enseignant, la présentation en classe entière et la discussion des travaux des élèves qui est contestée ici, mais plutôt la nature même de la situation créée par l'enseignant, qui limite fortement les possibilités de prendre véritablement en compte les raisonnements des élèves.

[4] Traduction libre : Si une situation fournit à l'enseignant la possibilité de dévoluer aux élèves une situation « autonome » d'action, alors, selon la théorie des situations didactiques en mathématiques, pendant la phase d'analyse des solutions des élèves, l'enseignant peut se référer à la situation objective. Cela est, parce que les élèves peuvent développer leurs stratégies personnelles et des formes de raisonnement liées aux situations auxquelles ils sont confrontés. L'enseignant n'a pas à avoir recours à des moyens rhétoriques didactiques pour traiter les formes de raisonnement des élèves.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

TEMPO DI VENDEMMIA

Michel Henry, Angela Rizza
per il Gruppo Funzioni[1]

Identificazione

Rally: 14.II.14
Categorie: 7, 8, 9, 10
Ambito concettuale: funzioni - messa in equazione e studio di un sistema di equazioni lineari

Sunto

Trovare i diversi modi per ottenere la coppia (18; 13) per somma di tre tipi di coppie (3; 2), (2; 1) e (1; 1) in un contesto di trasporto di due tipi di recipienti con tre mezzi di trasporto (sistema lineare di due equazioni in tre incognite intere e strettamente positive).

Testo del problema

Nella vigna del signor Brunello, in un giorno di vendemmia sono stati riempiti 18 cassoni grandi e 13 cassoni medi con l'uva raccolta. Per trasportare alla cantina i cassoni pieni d'uva, il signor Brunello dispone di tre trattori:

- il trattore A può trasportare, a pieno carico, 3 cassoni grandi e 2 medi;
- il trattore B può trasportare, a pieno carico, 2 cassoni grandi e 1 medio;
- il trattore C può trasportare, a pieno carico, 1 cassone grande e 1 medio.

Quel giorno, il signor Brunello ha utilizzato almeno una volta tutti i suoi trattori e sempre a pieno carico.

Quanti viaggi possono essere stati fatti dal signor Brunello con ciascun tipo di trattore per il trasporto di tutti i cassoni d'uva alla cantina?

Descrivete tutti i possibili viaggi e spiegate come li avete trovati.

Compito da risolvere e saperi mobilizzati

Per le categorie considerate si possono evidenziare diversi tipi di procedure. L'utilizzo della proporzionalità costituisce in ogni caso un prerequisito per il calcolo del numero di cassoni trasportati da un trattore durante i vari viaggi di andata e ritorno. E' anche inevitabile tenere in considerazione i numerosi vincoli.

a. Una procedura possibile: identificazione di un problema che richiede una messa in equazione algebrica, per la quale può essere anticipato un metodo risolutivo. Identificazione delle incognite del problema (per esempio a, b, c per indicare il numero dei viaggi dei trattori A, B, C), delle condizioni su queste incognite (interi strettamente positivi) e delle relazioni che le legano ($3a + 2b + c = 18$ e $2a + b + c = 13$). Applicazione di un metodo risolutivo semplificato, per esempio, si ottiene per differenza $a + b = 5$ e si scelgono le soluzioni costituite da numeri interi naturali diversi da zero: (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 2). Ogni coppia permette di determinare il valore corrispondente di c (rispettivamente 7, 6, 5, 4). Si ottengono così quattro possibilità.

Nota: è possibile semplificare la ricerca:

- in modo intuitivo e tenendo conto che i trattori fanno almeno un viaggio. Si è condotti ad un lavoro equivalente alla risoluzione di $3a' + 2b' + c' = 12$ e $2a' + b' + c' = 9$, con una limitazione del numero di casi da studiare.
- lavorando sull'aspetto sintattico e deducendo dalle equazioni che $a + b = 5$. Difficilmente si può riconoscere che questa deduzione compaia senza il ricorso al quadro algebrico.

b. Altra procedura possibile: operare nel campo moltiplicativo e additivo, con interi, in modo organizzato (eventualmente con una tabella) tenendo conto delle caratteristiche di ogni trattore e del numero di cassoni trasportati che aumenta con il numero di viaggi. Cominciare per esempio scegliendo il numero massimo di viaggi del trattore A, osservare che 6 viaggi non sono possibili, che 5 possono permettere di trasportare 18 cassoni grandi ma non 13 medi (si trasporterebbero 18 cassoni grandi e 12 medi, numero che non è sufficiente).

Supporre poi che il trattore A faccia 4 viaggi (12 CG, 8 CM), e quindi testare tutte le possibilità per i trattori B e C. Si ottiene così una prima soluzione: 4 viaggi per A, 1 per B e 4 per C.

E così di seguito sino ad ottenere le altre tre soluzioni: 3 viaggi per A, 2 per B e 5 per C, poi 2 viaggi per A, 3 per B, 6 per C e 1 viaggio per A, 4 per B e 7 per C.

---

[1] Il gruppo "Funzioni" che ha analizzato questo problema nell'ambito dei lavori del convegno del Lussemburgo nel 2013 era composto da Lucia Argilla, Maria Cristina Bonomi, Sandro Deplano, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Ana Paola Jahn, Francesca Ricci, Angela Rizza.

c. Determinare una soluzione (per tentativi) e ottenere le altre osservando che un viaggio di A equivale a uno di B e uno di C, assicurandosi dell'esaustività.

In questo modo si può cercare di distinguere due tipi di saperi mobilizzati:
- da un lato quelli legati al quadro delle equazioni lineari;
- dall'altro quelli legati all'aspetto funzionale.

Per questi ultimi si possono distinguere due aspetti:
- la necessaria messa in atto di un ragionamento che rivela la proporzionalità per il calcolo del numero di cassoni trasportati da un trattore durante i vari viaggi di andata e ritorno
- l'utilizzo pratico di una o due funzioni in più variabili. Il calcolo delle immagini viene operato nel campo additivo e moltiplicativo con numeri interi.

Parole chiave

Funzione, relazioni algebriche, relazioni funzionali, proporzionalità, sistema di equazioni lineari

Punteggi attribuiti

Su 550 classi di 9 sezioni che hanno partecipato alla prova II del 14° RMT

Punteggi attribuiti	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*N. classi*	*M*
Categoria 7	42	30	13	11	5	240	1,08
Categoria 8	28	34	15	12	11	196	1,45
Categoria 9	30	32	14	7	18	88	1,52
Categoria 10	15	31	12	19	23	26	2,04
Totale	34	32	14	11	10	550	1,32

Secondo i criteri determinati nell'analisi a priori:

4 Risposta corretta (le 4 possibilità: 4 viaggi per A, 1 per B e 4 per C; 3 viaggi per A, 2 per B e 5 per C; 1 viaggio per A, 4 per B e 7 per C) ben argomentate

3 Scoperta di 3 possibilità corrette con giustificazione

2 Scoperta di 2 possibilità con giustificazioni oppure 3 corrette e 1 o più possibilità sbagliate.

1 Una sola possibilità e/o prove o ragionamenti che attestano una comprensione iniziale del problema

0 Incomprensione del problema

Globalmente questo problema ha avuto una riuscita che potremmo classificare come “media”, anche nella categoria 10.

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Dagli elaborati con 0 punti si può notare che la comprensione del testo e la sua appropriazione si rivelano molto difficili. Sembrano costituire un ostacolo la molteplicità dei vincoli da tenere in considerazione e alcune forme sintattiche. Si identificano anche classi che hanno separato il problema in tre: quanti viaggi col trattore A per trasportare tutti i cassoni, poi con il trattore B, poi col C. Altre classi non hanno riconosciuto che i trattori viaggiano sempre a pieno carico, altre ancora non hanno tenuto conto del fatto che ogni trattore fa almeno un viaggio. Si riconoscono qui sia le difficoltà di trattamento dell’enunciato, sia le difficoltà legate alla gestione di troppi vincoli.

Le procedure utilizzate dalle classi che si sono impegnate nella ricerca sono nel complesso procedure per tentativi molto poco organizzati e che denotano solo strategie aritmetiche.

Le poche procedure organizzate sono poco produttive, non si rilevano né una tabella ben strutturata né liste appropriate (tranne che nella categoria 10). Si osservano anche strategie figurative, in cui gli allievi rappresentano i cassoni con barre di differenti dimensioni (anche in categoria 9). La maggior parte degli elaborati dà soluzioni corrette organizzando dei raggruppamenti. Si riconoscono anche procedure frequentemente utilizzate nei livelli inferiori, mentre neppure ai livelli 8, 9, 10 compaiono strategie algebriche.

È da notare che per i livelli osservati e per gli elaborati che consentono l’analisi, la questione della proporzionalità non pone difficoltà.

Indicazioni didattiche

L'utilizzo di questo problema in classe può essere fatto con diversi obiettivi.

Si può prima di tutto proporlo come un problema di ricerca senza obiettivi cognitivi, ma lavorando principalmente per le competenze metamatematiche[2]. Si cerca allora di sviluppare sia il saper fare nella risoluzione di problemi, sia un atteggiamento e un rapporto con la matematica favorevoli per affrontare questi problemi.

Si può anche puntare a obiettivi cognitivi.

Due sembrano possibili:

- la messa in evidenza di un aspetto funzionale, nel senso che il numero dei cassoni trasportati dipende da tre variabili (il numero di viaggi di ciascun trattore). Si può allora, con una sintesi dopo una ricerca minimale, studiare l'insieme dei valori assunti dalla funzione (le variabili sono qui intere e limitate) organizzando convenientemente la ricerca delle immagini.
- Una introduzione (o reintroduzione) dello strumento algebrico per risolvere problemi di questo tipo. Tenuto conto del risultato qui ottenuto, lo strumento algebrico non è chiaramente disponibile per gli allievi considerati, e può allora intervenire, dopo l'elaborazione di soluzioni errate o parziali oppure troppo faticose, come nuovo strumento che permette di ottenere tutte le soluzioni possibili più efficacemente. La situazione diventa allora una situazione-problema nel senso di Regine Douady e consente un nuovo apprendimento.

In ogni caso, quale che sia l'obiettivo, è necessario che gli allievi possano realmente impegnarsi nella risoluzione del problema e riconoscere quella che ne è la soluzione.

Per questo, e poiché il quadro di una situazione di classe con l'insegnante lo permette, si rende necessario fare un lavoro sull'enunciato e sulla sua appropriazione. Il vocabolario e le formulazioni devono essere esplicitate laddove necessario, le ambiguità eliminate, l'insieme dei vincoli messo in evidenza e questo affinché la comunità di ricerca sia concorde sul problema da risolvere.

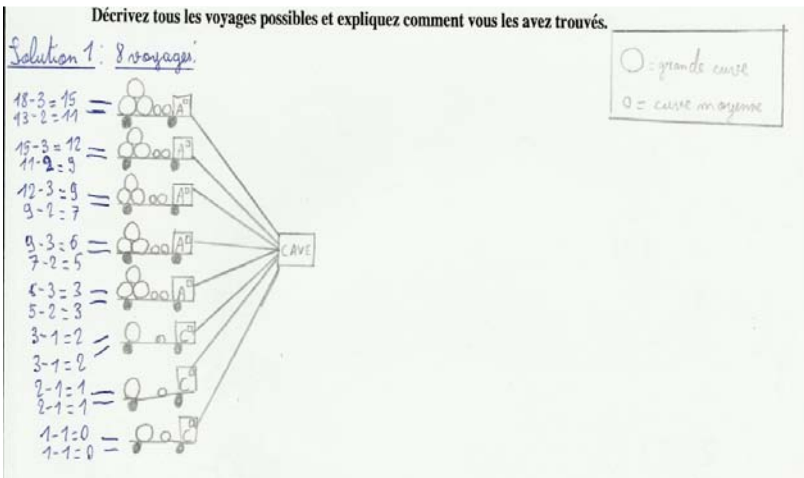
Realizzato ciò, le produzioni già raccolte mostrano che gli allievi devono poter impegnarsi nella ricerca e produrre dei ragionamenti che potranno essere esposti e poi discussi. La diversità delle strategie osservate permette di riconoscere la possibilità di sintesi differenti e coerenti con gli obiettivi posti.

Per andare più lontano

A. Come è stato detto precedentemente, le procedure messe in atto nel quadro delle prove del Rally non sono algebriche. Ciò non impedisce la loro varietà e la raffinatezza di alcune di esse. Ne presentiamo alcune.

a. Procedure che utilizzano rappresentazioni e tentativi figurativi.

i. Una procedura figurativa sbagliata.

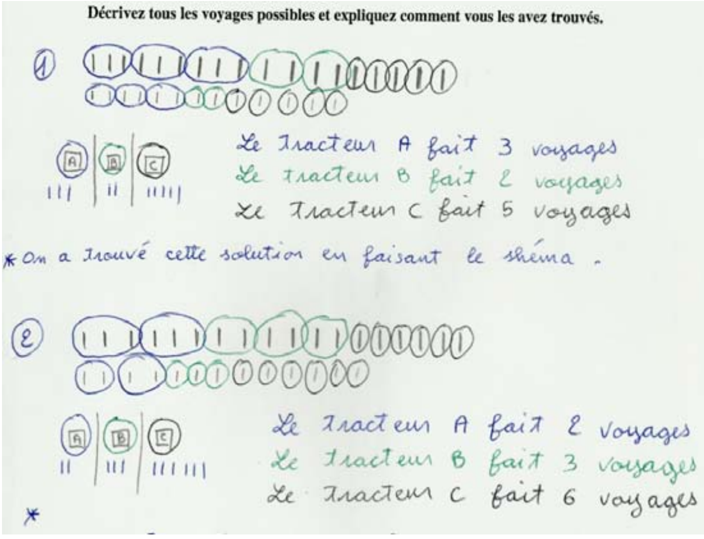


C'è qui una rappresentazione della situazione e una procedura che ricorda inizialmente quella di una divisione. Quando è impossibile proseguire con il trattore A (altrimenti il trattore C non sarebbe a pieno carico), si prosegue con il trattore C. In questo caso il vincolo sul trattore B è dimenticato.

ii. Una procedura figurativa, nella categoria 8, incompleta ma che permette di ottenere 3 soluzioni su 4.

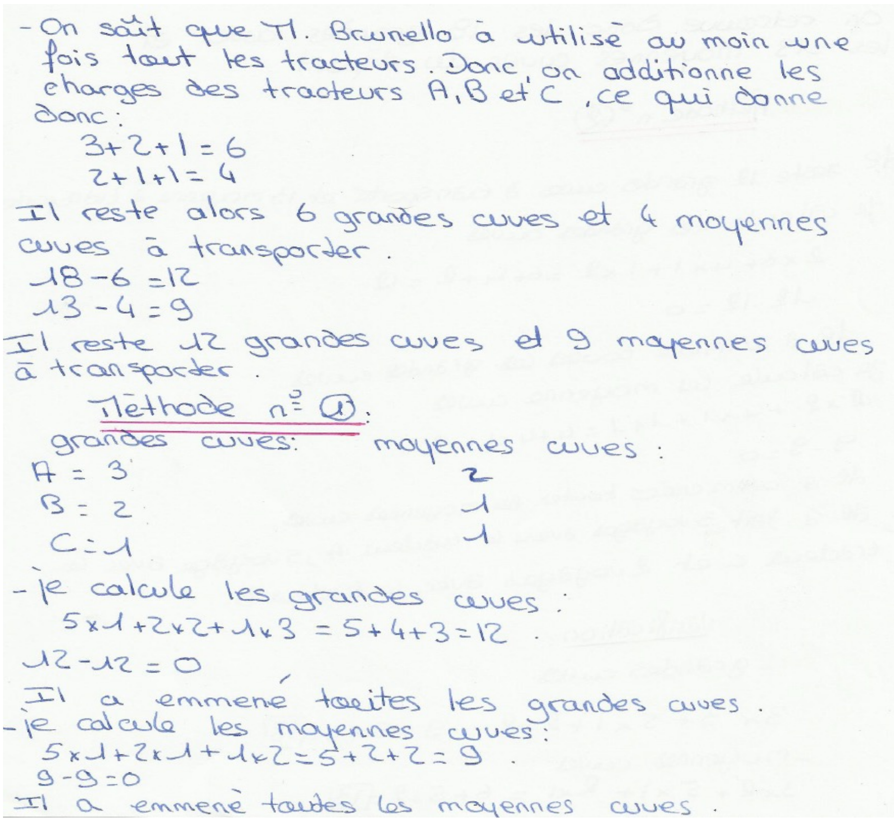
---

[2] Per gli obiettivi specifici e la messa in pratica si rinvia ai lavori dell'IREM di Lione e a (Arsac et Mante 2007) e (Exprime 2010).



b. Alcuni allievi che «riducono il problema»

i. Utilizzando l'informazione sul numero minimo di viaggi.



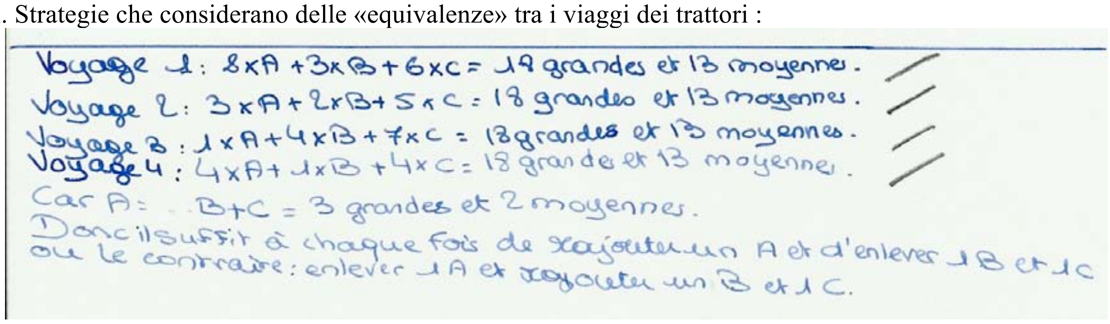
- On sait que M. Brunello a utilisé au moin une fois tout les tracteurs. Donc, on additionne les charges des tracteurs A, B et C, ce qui donne donc :
3+2+1=6
2+1+1=4
Il reste alors 6 grandes cuves et 4 moyennes cuves à transporter.
18-6=12
13-4=9
Il reste 12 grandes cuves et 9 moyennes cuves à transporter.
Méthode n° ①.
grandes cuves: moyennes cuves :
A = 3 2
B = 2 1
C = 1 1
- Je calcule les grandes cuves :
5×1+2×2+1×3 = 5+4+3=12
12-12=0
Il a emmené toutes les grandes cuves.
- Je calcule les moyennes cuves :
5×1+2×1+1×2=5+2+2=9
9-9=0
Il a emmené toutes les moyennes cuves.

Si sa che il signor Brunello ha utilizzato almeno una volta tutti i trattori. Quindi sommiamo il carico dei trattori A, B, C ottenendo:
3+2+1=6 2+1+1=4
Restano allora 6 cassoni grandi e 4 medi da trasportare. 18-6=12 13-4=9
Restano 12 cassoni grandi e 9 medi da trasportare.
<u>Metodo n.1</u>
Cassoni grandi
Cassoni medi
A=3
2
B=2
1
C=1
1
- Calcolo i cassoni grandi
5×1+2×2+1×3=5+4+3 =12 12-12=0
Ha portato tutti i cassoni grandi
- Calcolo i cassoni medi
5×1+2×1+1×2=5+2+1 =9 9-9=0
Ha portato tutti i cassoni medi

Nonostante un errore nel seguito, senza conseguenze, questi allievi metteranno in atto una procedura corretta e otterranno due soluzioni sulle quattro previste.
Più in generale, si osserva che gli studenti che si sono resi conto che ogni trattore aveva fatto almeno un viaggio, sono mediamente riusciti meglio degli altri.

Certamente ciò può essere dovuto al fatto che coloro che hanno prodotto questo primo ragionamento sono forse gli stessi che si sono meglio appropriati della situazione, ma è anche probabile che questa «riduzione» del problema, limitando l'entità dei numeri e quindi il numero di casi da studiare, faciliti l'organizzazione dei tentativi e i ragionamenti connessi.

ii. Strategie che considerano delle «equivalenze» tra i viaggi dei trattori :



Voyage 1 : 2xA+3xB+6xC= 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 2 : 3xA+2xB+5xC: 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 3 : 1xA+4xB+7xC = 18grandes et 13 moyennes.
Voyage4 : 4xA+1xB+4xC: 18 grandes et 13 moyennes.
Car A: B+C = 3 grandes et 2 moyennes.
Donc il suffit à chaque fois de rajouter un A et d'enlever 1B et 1C ou le contraire: enlever 1A et rajouter un B et 1C.

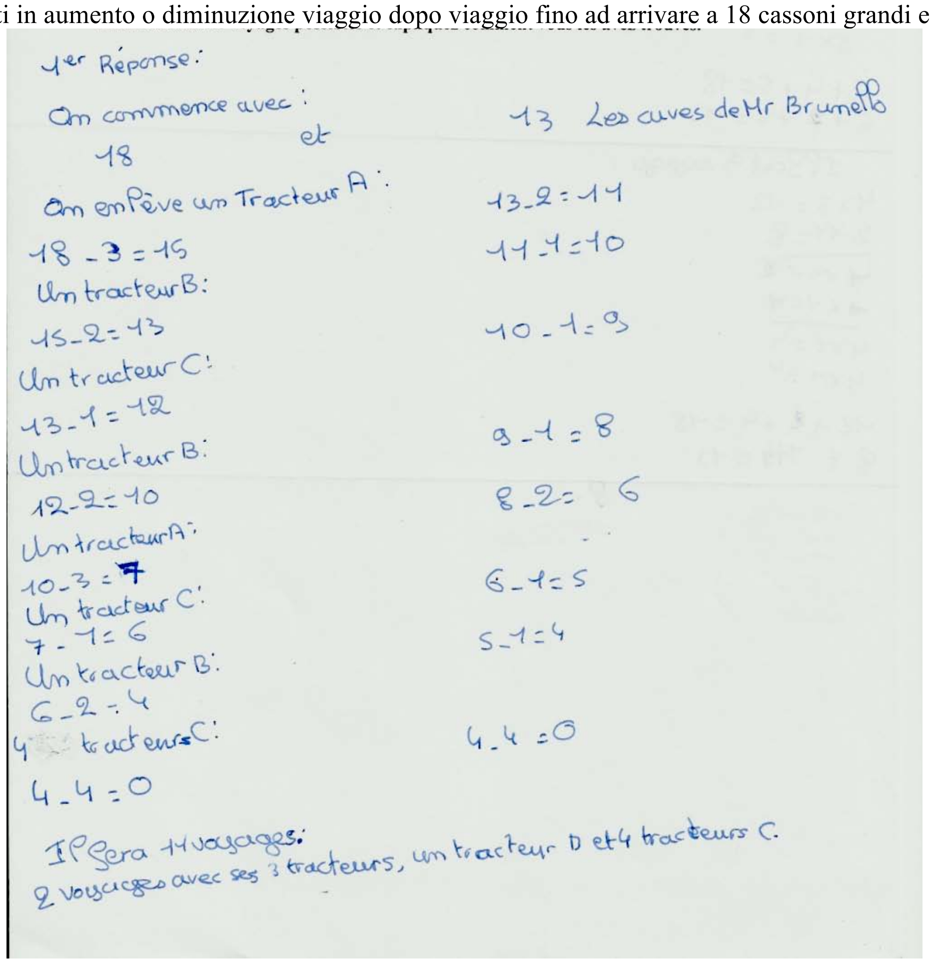
Viaggio 1: 2×A+ 3×B+ 6×C= 18 grandi e 13 medi   *Viaggio 2: 3×A+ 2×B+ 5×C= 18 grandi e 13 medi*
Viaggio 3: 1×A+ 4×B+ 7×C= 18 grandi e 13 medi   *Viaggio 4: 4×A+ 1×B+ 4×C= 18 grandi e 13 medi*

Perché A= B+C= 3 grandi e 2 medi

Dunque è sufficiente ogni volta aggiungere un A e togliere un B e un C o il contrario: togliere un A e aggiungere un B e un C.

La strategia permette allora di ottenere le altre soluzioni quando se ne individua una. Non è sempre chiaramente esplicitata l'esaustività della ricerca.

c. Altre procedure osservate si basano essenzialmente sulla ripartizione del numero dei cassoni trasportati per aggiustamenti in aumento o diminuzione viaggio dopo viaggio fino ad arrivare a 18 cassoni grandi e 13 medi



1er Réponse:
On commence avec : 18 et 13 Les cuves de Mr Brunetto
On enlève un Tracteur A : 18 - 3 = 15 13 - 2 = 11
11 - 1 = 10
Un tracteur B: 15 - 2 = 13 10 - 1 = 9
Un tracteur C: 13 - 1 = 12 9 - 1 = 8
Un tracteur B: 12 - 2 = 10 8 - 2 = 6
Un tracteur A: 10 - 3 = 7 6 - 1 = 5
Un tracteur C: 7 - 1 = 6 5 - 1 = 4
Un tracteur B: 6 - 2 = 4
4 tracteurs C: 4 - 4 = 0 4 - 4 = 0
Il sera 14 voyages:
2 voyages avec ses 3 tracteurs, un tracteur B et 4 tracteurs C.

In genere dopo le prime fasi di calcolo, gli studenti propongono un aggiustamento che permetta di soddisfare tutti i vincoli per gli ultimi viaggi, anche se raramente lo esplicitano.

d. Nella categoria 9 si possono anche osservare scritture che lasciano apparire un'idea di funzione di una variabile (numero di cassoni grandi, numero di cassoni medi):

Le possibilità sono:

4a + 1b + 4c = (12, 8) + (2, 1) + (4, 4) = 18 g, 13 m

3a + 2b + 5c = (9, 6) + (4, 2) + (5, 5) = 18 g, 13 m

2a + 3b + 6c = (6, 4) + (6, 3) + (6, 6) = 18 g, 13 m

1a + 4b + 7c = (3, 2) + (8, 4) + (7, 7) = 18 g, 13 m

Non ci sono altre possibilità di scomposizione

e. Bisogna attendere la categoria 10 per ottenere le prime giustificazioni circa l'esaustività delle soluzioni ottenute.

«Abbiamo proceduto per tentativi dando alla A un valore crescente e calcolando il numero restante di trattori», e ancora

NON È POSSIBILE TROVARE ALTRE SOLUZIONI PERCHÉ UNA AUMENTA (IL TRATTORE A) E LE ALTRE DIMINUISCONO (I TRATTORI B E C), QUINDI IL VALORE PIÙ BASSO DEVE ESSERE "UNO" PER FA SÌ CHE I TRATTORI SIANO A PIENO CARICO.

IL NUMERO DEI VIAGGI LO ABBIAMO TROVATO PER TENTATIVI.

Oppure:

Ci siamo accorti che facendo B + C = A.
Abbiamo trovato una combinazione che andava bene:

1A + 4B + 7C.

Usando la formula di prima abbiamo aggiunto una A e quindi tolto sia una B, che una C.

Ecco tutte le combinazioni possibili:

1A + 4B + 7C

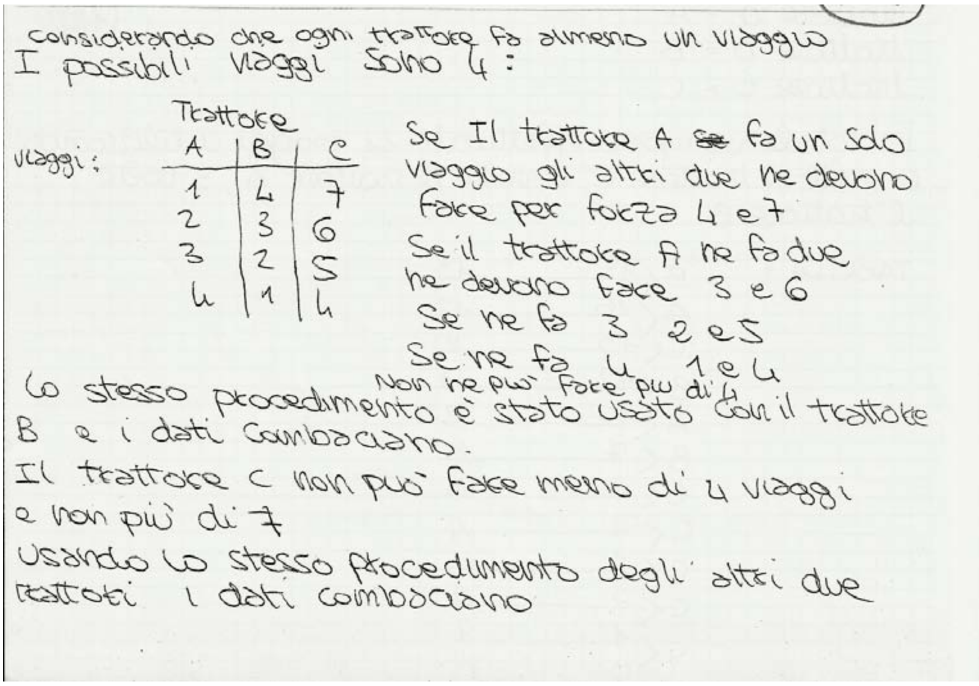
2A + 3B + 6C

3A + 2B + 5C

4A + 1B + 4C

Non sono possibili altre combinazioni perché andando avanti con il metodo trovato, sparirebbe B.

E ragionamenti via via più complessi:



considerando che ogni trattore fa almeno un viaggio
I possibili viaggi sono 4:

Trattore

viaggi:	A	B	C
	1	4	7
	2	3	6
	3	2	5
	4	1	4

Se Il trattore A ~~se~~ fa un solo viaggio gli altri due ne devono fare per forza 4 e 7
Se il trattore A ne fa due ne devono fare 3 e 6
Se ne fa 3 2 e 5
Se ne fa 4 1 e 4
Non ne può fare più di 4
Lo stesso procedimento è stato usato con il trattore B e i dati combaciano.
Il trattore C non può fare meno di 4 viaggi e non più di 7
Usando lo stesso procedimento degli altri due trattori i dati combaciano

B. Una situazione simile. Possiamo confrontare gli elementi ottenuti in questo studio con i lavori di Patrick Gibel. Egli ha suggerito nei suoi lavori di ricerca in didattica della matematica una situazione basata su un problema simile. Si tratta della situazione «Sci a Gourette». Il contesto proposto è quello di un'uscita sciistica e lo studio dei costi di gruppi partecipanti. Questa situazione è stata proposta in CM2 (Brousseau, Gibel 2002, Gibel 2007).

Enunciato del problema:

È stata organizzata per sabato una giornata di sci a Gourette per gli allievi del Cantone di Oloron. Il Consiglio di Istituto ha deciso per questo speciale evento di pagare gli skipass per la giornata. La stazione di Gourette offre le seguenti tariffe: 216 skipass: 1275 F, 36 skipass: 325 F, 6 slipass: 85 F

Si sono iscritti 979 bambini ma, al momento della partenza, ci sono 12 assenti per malattia.

Il segretario del Consiglio d'Istituto ha dichiarato: «Peccato per questi assenti, ma non importa: e poi la spesa sarà inferiore». Che cosa ne pensi?

Nella forma proposta si tratta di un problema di ottimizzazione, dove si ritrovano molte caratteristiche del problema 14.II.14, tra cui il fatto di ricorrere ad una funzione di tre variabili, impossibile da rappresentare nel piano (si esclude così il metodo grafico) e difficile da trattare con tabelle (che non sono più a doppia entrata!)
È inoltre evidente che questo problema presenta anche molte difficoltà che per alcuni risultano insuperabili, come ad esempio:

- Capire il riferimento sociale e commerciale della situazione
- Identificare le variabili in gioco e individuare quelle che sono in una relazione di proporzionalità
- Percepire in particolare che, per ogni tariffa, il numero di skipass acquistati è proporzionale al prezzo da pagare, ma che, per il vincolo implicito di ottimizzazione dei costi, non vi è proporzionalità tra il numero di skipass e i prezzi praticati.
- Capire che per rispondere alla domanda è necessario calcolare due costi minimi (che occorrerà determinare) e confrontarli tra loro.

Patrick Gibel ha sperimentato e illustrato in dettaglio questa ricerca in (Gibel 2007).

Va rilevato che:

- l'enunciato non permette agli alunni di determinare la situazione oggettiva. L'implicito dell'enunciato sulla non proporzionalità viene raramente superato e sono numerosi i gruppi che elaborano modelli errati.
- la devoluzione è difficile. Gli alunni non si appropriano sufficientemente del problema per comprenderne tutti gli snodi. L'aspetto dell'ottimizzazione non è stato ben compreso da una gran parte di essi.
- le difficoltà appaiono non tanto a livello di tecniche del calcolo quanto a livello di ragionamento. Una diversa devoluzione sembra quindi necessaria per comprendere la complessità della situazione.

Nell'articolo (Gibel 2007), l'autore osserva che gli scambi dopo la ricerca sono difficili e che le argomentazioni sono più spesso di ordine retorico che semantico. Egli fornisce conclusioni chiare ed esplicita diverse ragioni per le quali la sperimentazione è fallita per la maggior parte degli allievi, e in particolare:

> "The study shows that although the students, faced with a problem situation elaborated and conducted by the teacher, have certainly produced forms of reasoning, they have not made much progress in their practice of reasoning. Indeed, they have not reflected back on their reasoning, on its validity, relevance or adequacy because the teacher was not able to process it. He could not respond to this reasoning by logical arguments based on the objective situation; he was forced to use rhetorical means. Now, it is not the complexity of the students' reasoning that forced the teacher to use this type of means but the fact that the problem situation could not be devolved to the students. This implies that it is not the teacher's management of the whole class presentation and discussion of the students' work that is challenged here, but rather the nature itself of the situation set up by the teacher, which strongly constrains the possibilities of really taking into account the students' reasoning."[3]

e ancora:

> "If a situation provides the teacher with the possibility of devolving to the students an «autonomous» (or «self-contained») situation of action, then, according to the theory of didactical situations in mathematics, during the phase of analysis of students' solutions the teacher can refer to the objective situation. This is because the students can develop their personal strategies and forms of reasoning related to the situations with which they are confronted. The teacher does not have to have recourse to rhetorical didactical means to process students' forms of reasoning.[4]

Si ritrova così la stessa difficoltà ad entrare nel significato della situazione oggettiva. Questa difficoltà non può essere superata con dei semplici effetti retorici che l'insegnante potrebbe mettere in atto. Si tratta piuttosto, in entrambi i casi, di concepire un dispositivo che permetta una autentica appropriazione e comprensione del significato.

Si può concludere allora con la necessità di proporre problemi di ricerca che permettano una autentica devoluzione e per i quali si possa fare riferimento ad un mezzo oggettivo che dia senso alla situazione ed agli scambi che si potranno instaurare. E al di là del problema matematico proposto, resta una tappa fondamentale la riflessione sul dispositivo didattico da mettere in atto in funzione degli allievi coinvolti e dei saperi da raggiungere.

Bibliografia

Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren CRDP de Lyon.

Brousseau, G. & Gibel, P. (2002), Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe, dans *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* ARDM et IREM Paris 7.

EXPRIME (2010). *Expérimenter des problèmes innovant en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP

Gibel, P. (2007) Analysis of the teachers's arguments used in the didactical management of a problem solving situation, CERME 5.

[3] *Traduzione libera*: Lo studio dimostra che, anche se sebbene gli allievi, di fronte a una situazione problematica elaborata e condotta dal docente, abbiano certamente prodotto forme di ragionamento, non hanno fatto progressi rilevanti nella loro pratica di ragionamento. Essi, infatti, non hanno riflettuto sul loro ragionamento, sulla sua validità, rilevanza o adeguatezza perché l'insegnante non è stato in grado di permetterlo. Non poteva rispondere a questo ragionamento con argomentazioni logiche basate sulla situazione oggettiva; è stato obbligato ad utilizzare mezzi retorici. Ora, non è stata la complessità del ragionamento degli allievi che ha costretto l'insegnante ad utilizzare questo tipo di mezzi, ma il fatto che la situazione problema non poteva essere affidata agli allievi. Ciò implica che non è la gestione dell'insegnante, la presentazione alla classe intera e la sua discussione dei lavori degli studenti che sono contestati qui, ma piuttosto la natura stessa della situazione proposta dall'insegnante, che limita fortemente le possibilità di prendere davvero in considerazione il ragionamento degli studenti.

[4] *Traduzione libera*: Se una situazione offre all'insegnante la possibilità di mettere gli allievi in una situazione di azione «autonoma», allora, per la teoria delle situazioni didattiche in matematica, durante la fase di analisi delle soluzioni degli allievi l'insegnante può fare riferimento alla situazione oggettiva. Questo perché gli allievi possono sviluppare le loro strategie personali e delle forme di ragionamento strettamente legate alle situazioni con cui si sono confrontati. L'insegnante non deve però ricorrere a mezzi didattici retorici per trattare le forme di ragionamento degli allievi.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

DA DUE A QUATTRO CIRCONFERENZE

Gruppo Zeroallazero[1] e Lucia Doretti[2]

L'approfondimento qui proposto è relativo alla scheda della Banca di problemi, redatta a partire dal problema "le due circonferenze" e coinvolge l'analisi di una sua variante dal titolo "Le quattro circonferenze".

Le due circonferenze

Identificazione

Rally: 22.II.18
Categorie: 9, 10
Ambito concettuale: Geometria piana, circonferenze
Famiglia del compito per la risoluzione: circonferenze concentriche, distanza, approssimazione

Sunto

Calcolare la distanza tra due circonferenze concentriche, delle quali non sono date le misure, sapendo che la differenza tra le loro lunghezze è 10 cm.

Enunciato del problema

Luca disegna una circonferenza e il suo amico Matteo disegna una circonferenza concentrica che misura 10 cm di più.
Qual è la distanza fra le due circonferenze?
Esprimete il risultato a meno di un millimetro e giustificate la vostra risposta.

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati

- Uno dei due compiti iniziali consiste nel percepire sul disegno delle due circonferenze concentriche la "distanza" tra le due circonferenze" e di cercare di definirla mediante un segmento: parte del raggio della circonferenza esterna i cui estremi sono determinati dalle intersezioni con le due circonferenze.
- Il secondo di tali compiti iniziali consiste nel comprendere che i "10 cm di più" non sono rappresentati da un segmento di cui si possa misurarne la lunghezza "con il righello", bensì da un arco di circonferenza, difficile da misurare.
- Comprendere allora che bisognerà effettuare dei calcoli di lunghezze di circonferenza, a partire da esempi di costruzioni considerate come provvisorie visto che non si conoscono i raggi dei cerchi e che, a maggior ragione, l'enunciato fa intuire che il risultato sarà indipendente dai raggi!!
  Se ci si rende conto, a partire da un esempio, che la procedura è generale, bisogna allora darne una giustificazione dicendo che la distanza $10/2\pi$ è indipendente dai raggi scelti che si sottraggono nell'espressione precedente per arrivare alla differenza data di 10 (cm).
  Se la costanza della distanza tra le due circonferenze non è percepita, passare ad altri esempi scegliendo altre misure e dall'osservazione che i valori che si ottengono per la distanza variano di poco, dedurre che la distanza non dovrebbe dipendere dalle circonferenze scelte e cercare di effettuare una generalizzazione.
- Laddove si disponga di conoscenze algebriche da mettere in gioco, indicando con r e R i raggi delle due circonferenze, si può esprimere la relazione tra le loro lunghezze nella forma $2\pi R = 2\pi r + 10$ e si calcola allora la differenza tra R e r a partire da $2 \pi R - 2 \pi r = 10$ per arrivare a $2 \pi (R - r) = 10$, con $(R - r) = 5/\pi$.
  Passare allora al calcolo su un esempio fissando la lunghezza delle circonferenze. Per esempio, con 100 e 110 (in cm) si ottiene $r = 100/2\pi$ ($\approx 15{,}9$) e $R = 110/2\pi$ ($\approx 17{,}5$) e la distanza tra le due circonferenze:
  $100/2\pi - 100/2\pi = (110 - 100)/2\pi = 10/2\pi = 5/\pi$ ($\approx 1{,}6$).

I saperi mobilizzati sono la conoscenza del rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo raggio, la padronanza delle formule algebriche corrispondenti, il passaggio da scritture decimali approssimate ai numeri irrazionali, la capacità di condurre un'argomentazione rigorosa (giustificazione) sull'indipendenza della distanza tra le circonferenze in rapporto ai loro raggi, per un medesimo ingrandimento.

---

[1] Membri attuali del gruppo: Maria Felicia Andriani, Clara Bisso, Serafina Foglia, Silvano Gregori, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi, Angela Rizza, Vincenza Vannucci.

[2] Una delle coordinatrici della Sezione di Siena dell'ARMT.

Parole chiave

Circonferenza, raggio, circonferenze concentriche, distanza tra due circonferenze, generalizzazione, definizione, approssimazione

Punteggi attribuiti

su 258 classi di 8 sezioni

Punteggi	0	1	2	3	4	Totale	m
Cat. 9	71	18	23	14	19	**145**	**1.3**
Cat. 10	37	6	13	17	40	**113**	**2.2**
Tot	**108**	**24**	**36**	**31**	**59**	**258**	**1.6**

in %

Cat. 9	49%	12%	16%	10%	13%
Cat. 10	33%	5%	12%	15%	35%
Tot	**42%**	**9%**	**14%**	**12%**	**23%**

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

4 Risposta corretta (1,6 cm) con giustificazione della sua valenza in generale

3 Risposta corretta con giustificazione basata su più di un esempio

2 Risposta corretta con giustificazione basata su un solo esempio
oppure risposta errata dovuta ad un errore di calcolo

1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione

0 Incomprensione del problema

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Le tabelle con i punteggi evidenziano con una certa chiarezza la progressione importante del punteggio "4" che indica la correttezza di una giustificazione della valenza generale del risultato, nel passare dalla categoria 9 alla categoria 10.

I punteggi "3" relativi alla ricerca della soluzione con il ricorso a più di un esempio, sono pochi. Mentre sono un po' più numerosi gli elaborati che evidenziano una risoluzione tramite un solo esempio.

Una parte abbastanza consistente degli elaborati è stata consegnata in bianco. Sintomo di una difficoltà ad approcciare un problema ricco di contenuto matematico e pertanto impegnativo per gli allievi.

Il "cuore" del problema è la validità generale (indipendenza dei raggi delle circonferenze) della misura della distanza fra le due circonferenze. Tale generalità giustifica l'apparente "mancanza" di dati, vissuta dagli allievi come un ostacolo e in molti casi da essi aggirata attribuendo arbitrariamente un valore al raggio. Gli allievi che risolvono il problema in questo modo, cioè ragionando solo su un esempio, non sembrano avere alcuna consapevolezza che la loro risposta sia solo parziale e che il loro ragionamento non abbia la validità di una giustificazione generale.

D'altra parte per generalizzare occorre essere in grado di assegnare parametri letterali agli enti in questione, e di procedere utilizzando gli strumenti del calcolo letterale. La poca abitudine a questi livelli scolari di risolvere situazioni problematiche con tali strumenti, ha senz'altro influito sui risultati ottenuti. Inoltre tale procedura può comportare errori derivanti da difficoltà diverse a seconda che si lavori con una o due lettere. Nel primo caso occorre aver dimestichezza con le frazioni algebriche, nel secondo caso occorre anche rendersi conto che l'equazione impostata non ha due incognite, perché ciò che si deve determinare è la differenza dei raggi.

Un'ulteriore difficoltà riguarda l'espressione "distanza tra le due circonferenze" che probabilmente non viene definita formalmente in classe; il significato di tale espressione potrebbe però essere intuito dagli allievi sulla base delle già note nozioni di distanza, in particolare della distanza fra due rette parallele, come cammino più breve che unisce un punto di una circonferenza a un punto dell'altra.

Infine il terzo aspetto problematico è quello dell'approssimazione, spesso sottointeso e non esplicitamente affrontato nella prassi scolastica.

Indicazioni didattiche

Come si è visto nella rubrica "Procedure, ostacoli e errori" gli aspetti matematici legati a questo problema sono molteplici e meritano di essere approfonditi con un lavoro in classe. Vediamo nel dettaglio i tre principali aspetti.

Generalità

La sfida di questo problema~~,~~ non è tanto quella che riguarda l'uso corretto della relazione lunghezza della circonferenza e raggio per arrivare alla distanza fra le due circonferenze, bensì quella relativa alla capacità di svolgere un ragionamento generale. Infatti, laddove ci si fermi ad un solo esempio (ma anche a diversi esempi) non ci si rende conto che la procedura non è generale e che la risposta, "apparentemente" corretta, è in qualche modo "abusiva". Un uso opportuno di questo problema in classe con una messa in comune delle procedure, ma anche con "rinunce" a procedere, rappresenta una bella opportunità di apprendimento: il ricorso a degli esempi, se da un lato può far intravedere una soluzione, dall'altro non la giustifica e diventa necessario imparare a generalizzare una procedura. È opportuno che l'insegnante stimoli la necessità di generalizzazione, nel caso che gli allievi non ne avvertano l'esigenza. Tante sono le occasioni in cui l'insegnante può stimolare gli allievi già partire dalla scuola primaria, ad esempio con la riflessione sulle proprietà delle operazioni o sulle formule geometriche, o più avanti con la proposta di problemi che, per alcuni valori numerici, hanno una soluzione, che non vale più da un certo punto in poi. Un esempio è l'espressione $n^2 - n + 41$ che fornisce numeri primi per qualunque valore naturale di n~~,~~ minore di 41, ma che per n=41 dà il risultato 41^2 che non è primo.

In effetti, però, la formulazione della domanda del problema e della consegna non richiedono esplicitamente la generalizzazione e focalizzano l'attenzione sulla misura della distanza (un numero).

Da qui la necessità di una nuova formulazione del problema che verrà presentato più avanti.

Definizioni

La definizione di "distanza fra le circonferenze" può essere l'occasione per un approfondimento sul concetto di definizione: cercare e confrontare diverse definizioni di uno stesso oggetto matematico, provare ad inventare nuove definizioni o a generalizzarne altre. Nel caso specifico provare a definire la distanza fra due circonferenze e poi generalizzarla ad altre curve. Si tratta di una attività che abitua gli allievi alla riflessione sull'uso di un linguaggio rigoroso e alla necessità di fare e condividere delle scelte.

Approssimazione

Il problema può essere l'occasione di riflettere su questo importante e spesso trascurato aspetto. Che cosa significa approssimare "a meno di un millimetro"? Qual è la differenza fra esprimere il risultato del problema nella forma $5/\pi$ oppure 1,6 oppure 1,59? Per ottenere il risultato richiesto 1,6 cm è opportuno approssimare π con 3,14 o si potrebbe approssimare anche ad esempio con 3,1? In altri contesti (per esempio se la richiesta fosse di approssimazione a meno di un nanometro) l'approssimazione abituale di π con 3,14 sarebbe corretta? Queste sono alcune delle domande che potrebbero emergere da una discussione in classe sul problema e che possono favorire una migliore comprensione del significato di numero irrazionale e far percepire la necessità, in contesti concreti, di una corretta approssimazione.

Dalle due alle quattro circonferenze

Constatate le difficoltà di cui ai paragrafi precedenti, in particolare per gli aspetti connessi alla generalizzazione e all'approssimazione, si è pensato di predisporre una variante del problema, che propone il confronto fra due coppie di circonferenze di raggio diverso ed elimina la richiesta del risultato numerico della distanza, evitando così anche la questione dell'approssimazione

In una prima formulazione, l'enunciato si presentava nel modo seguente:

LE QUATTRO CIRCONFERENZE (versione I) (Cat. 9, 10)

Luca disegna una circonferenza e il suo amico Matteo disegna una seconda circonferenza concentrica alla prima e più lunga di 10 cm.

Angela disegna un'altra circonferenza molto più grande di quella di Luca e la sua amica Licia disegna una circonferenza concentrica, anche in questo caso più lunga di 10 cm.

Fra le due circonferenze dei maschi e fra le due circonferenze delle femmine ci sarà sempre la stessa distanza o no?

Giustificate la vostra risposta con il dettaglio dei calcoli che avete fatto.

Successivamente, le discussioni sorte all'interno del gruppo hanno portato ad introdurre una ulteriore richiesta che potesse meglio favorire la generalizzazione del risultato:

LE QUATTRO CIRCONFERENZE (versione II) (Cat. 9, 10)

Luca disegna una circonferenza e il suo amico Matteo disegna una seconda circonferenza concentrica alla prima e più lunga di 10 cm.

Angela disegna un'altra circonferenza molto più grande di quella di Luca e la sua amica Licia disegna una circonferenza concentrica, anche in questo caso più lunga di 10 cm.

Fra le due circonferenze dei maschi e fra le due circonferenze delle femmine ci sarà sempre la stessa distanza o no?

E se disegnassero altre coppie di circonferenze concentriche le cui lunghezze differiscono di 10 cm, ci sarebbe sempre la stessa distanza?

Giustificate la vostra risposta con il dettaglio dei calcoli che avete fatto.

Infine, è stato deciso, con i responsabili della seconda prova del 24° RTM, nell'ambito della quale sarebbe stato inserito il problema, di eliminare una delle due richieste (anche in accordo con i criteri di redazione dei problemi nel frattempo definiti) per puntare decisamente sulla questione della validità generale del risultato.

LE QUATTRO CIRCONFERENZE (versione definitiva) (Cat. 9, 10)

Luca disegna una circonferenza e il suo amico Matteo disegna una seconda circonferenza concentrica alla prima e più lunga di 10 cm di quella di Luca.

Angela disegna un'altra circonferenza molto più grande di quella di Luca e la sua amica Licia disegna, a sua volta, una circonferenza concentrica a quella di Angela, e più lunga di questa di 10 cm.

Luca e Matteo determinano la distanza tra le loro circonferenze; Angela e Licia fanno la stessa cosa con le loro circonferenze. Alla fine i quattro amici si accorgono che le due distanze sono uguali.

E se disegnassero altre coppie di circonferenze concentriche le cui lunghezze differiscono di 10 cm, varierebbe, da una coppia all'altra, la distanza tra le due circonferenze?

Giustificate le vostre risposte.

Analisi delle procedure utilizzate

Benché i risultati globali non siano molto diversi da quelli relativi al problema delle due circonferenze – ovviamente non si tratta dei medesimi allievi e non ha senso fare un confronto significativo – può essere interessante constatare che un certo numero di elaborati fa chiaramente riferimento alla generalizzazione.

Come nel caso del problema delle due circonferenze, si nota un miglioramento nel passaggio dalla categoria 9 alla categoria 10.
Certamente alcune delle difficoltà evidenziate in precedenza, quali ad esempio *per generalizzare occorre essere in grado di assegnare parametri letterali agli enti in questione, e di procedere utilizzando gli strumenti del calcolo letterale. La poca abitudine a questi livelli scolari di risolvere situazioni problematiche con tali strumenti ha senz'altro influito sui risultati ottenuti. Inoltre tale procedura può comportare errori derivanti da difficoltà diverse a seconda che si lavori con una o due lettere,* sono state osservate anche i numerosi elaborati relativi alla nuova versione del problema.

In merito alla problematica della generalizzazione, l'analisi dei 78 elaborati di Parma e dei 75 di Siena, questi ultimi analizzati da Lucia Doretti, mettono in evidenza diversi tipi di ragionamento che potrebbero essere visti in una sorta di interessante progressione:

A) Semplice osservazione che se una grandezza varia, anche l'altra varia allo stesso modo. Si accenna ad una proporzionalità, ma risulta difficile valutare se essa è percepita nel modo corretto ossia come proporzionalità fra la differenza delle lunghezze di due circonferenze e la differenza dei raggi. In particolare risulta di difficile valutazione la sola operazione $10/(2\pi) = 1{,}59$ senza altri commenti o calcoli: non è chiaro se 10 viene percepito come lunghezza di una circonferenza o come differenza fra le lunghezze di due circonferenze (PR cat. 9).

Si perché (10 : K) = $\frac{10 : 3,14}{2}$ = 1,59

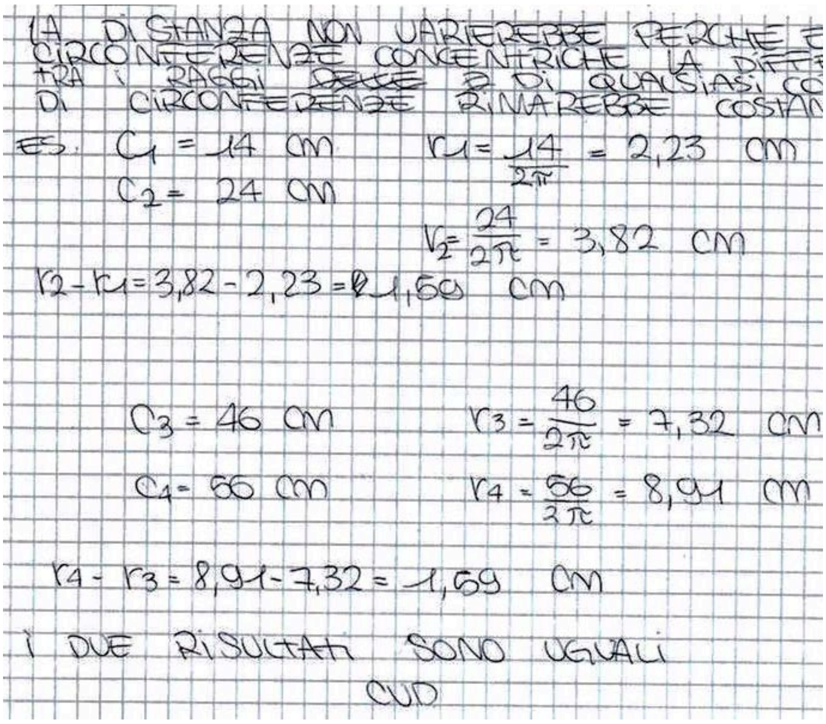
1,59 = distanza tra le circonferenze concentriche che
[illegible] di 10 cm

In un elaborato di cat. 9 (SI) si parte dal legame di proporzionalità tra circonferenza e raggio per affermare, in generale, che un aumento di 10 cm della lunghezza di una circonferenza porterà ad un aumento proporzionale del raggio della circonferenza stessa, ma si rimane sul piano intuitivo, senza dire quale sia la costante di proporzionalità.

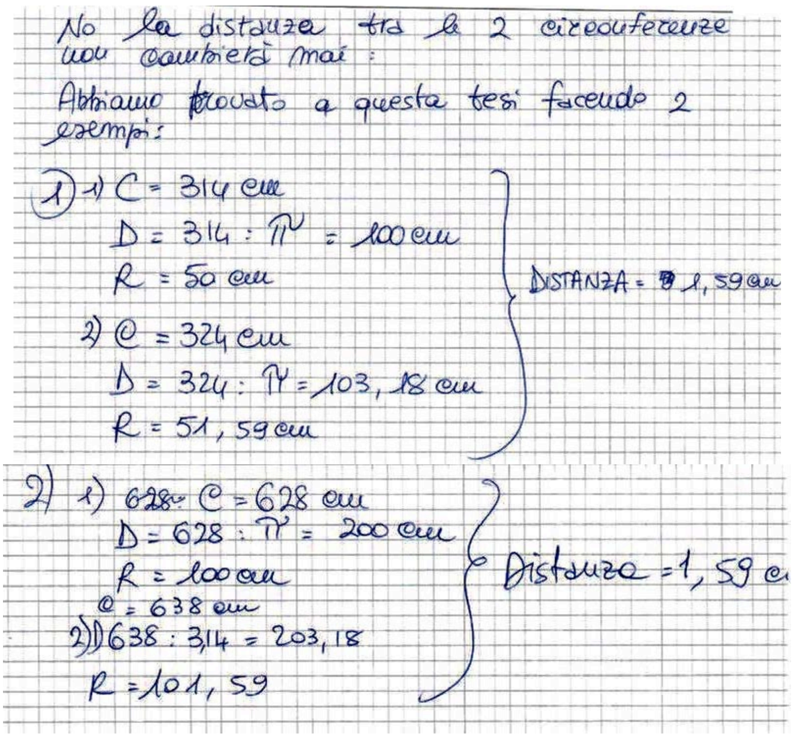
Se prendiamo in considerazione la formula per il
calcolo della circonferenza, ovvero 2rπ, possiamo
intuire che l'unica variabile in tale formula è il
raggio (r). Dato che la circonferenza e il raggio
sono direttamente proporzionale, all'aumento
di 10 cm della circonferenza ne conseguirà
un aumento proporzionale del raggio della
tale circonferenza, per qualsiasi essa sia.
In conclusione la distanza tra le 2
circonferenze concentriche che differiscono di
10 cm non varierà mai

In altri elaborati di Siena sono presenti solo frasi che parlano genericamente di proporzionalità, ma senza aggiungere altro, come questa: *"Per noi la distanza tra le 2 circonferenze non varia perché la distanza è direttamente proporzionale."*

B) Costruzione di due esempi numerici, probabilmente nella convinzione che siano sufficienti per garantire la generalità del risultato (si veda la parola "qualsiasi" in PR cat. 9):



In alcuni casi vengono rilevate difficoltà nel calcolo letterale (2πr+10=?), in altri una certa abilità nello scegliere esempi “furbi” ossia con circonferenze di lunghezza multipla di 3,14 (PR cat. 9). I valori più comuni per la lunghezza della circonferenza sono i multipli di 10.



Significativo è il seguente elaborato di cat. 9 di Siena, in cui si usano espressioni letterali, n e n+10 (si pensa evidentemente a numeri naturali), per indicare le misure di una coppia di circonferenze concentriche e poi si conclude sulla validità generale del risultato, considerando solo i casi n=45 e n=78 per i quali si calcolano i raggi delle circonferenze e la loro differenza. Siamo certamente distanti dall’idea corretta di “generalizzazione”, ma si ha la convinzione del contrario, come è ribadito nella frase conclusiva presente nell’elaborato *“Abbiamo dimostrato che la distanza fra due circonferenze differenti di 10 cm, rimane invariata, ovvero 1,6 cm”.*

Considerando le due circonferenze (n e n+10), il ~~raggio~~ valore della distanza tra le due circonferenze rimane invariato, ovvero di 1,6 cm.
Qualsiasi valore venga attribuito ad "n", la distanza ~~rimane invariata~~ tra una circonferenza e quella rimanente, rimane invariata.

Esempio

n = 45

circonferenza n = 45 cm
circonferenza n+10 = 55 cm

$\frac{45}{2\pi} = 7,2$ $\quad 8,8 - 7,2 = 1,6$ cm

$\frac{55}{2\pi} = 8,8$

distanza tra le due circonferenze

circonferenza n = 78 cm
circonferenza maggiore 88 cm

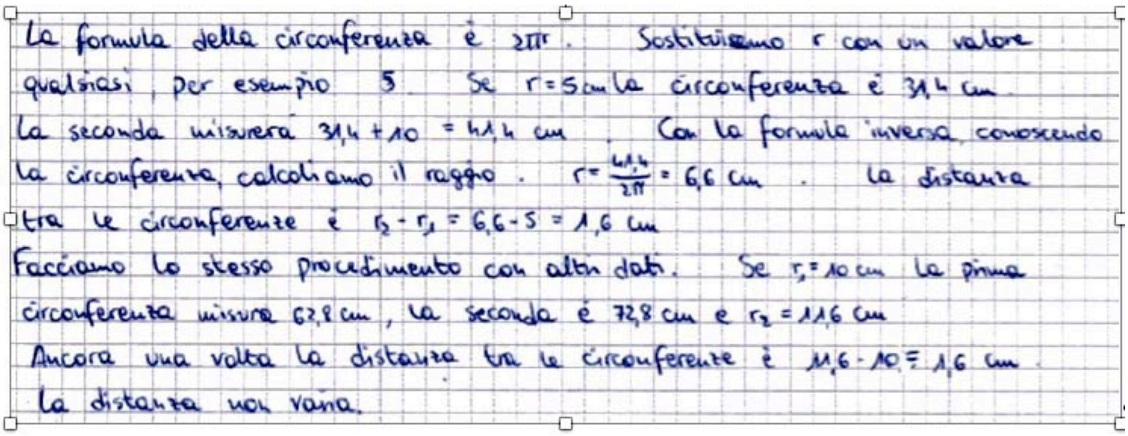
$\frac{78}{2\pi} = 12,4$ cm raggio circonferenza minore

$\frac{88}{2\pi} = 14$ cm raggio circonferenza maggiore

$14 - 12,4 = 1,6$ cm

Abbiamo dimostrato che la distanza fra due circonferenze differenti di 10 cm, rimane invariata, ovvero 1,6 cm.

La convinzione dell'invarianza della distanza limitandosi a verificarla in casi particolari rimane anche in diversi elaborati di cat. 10, come mostra il caso seguente (SI), in cui l'affermazione *"La distanza non varia"* è conseguenza della verifica per due valori del raggio.



La formula della circonferenza è $2\pi r$. Sostituiamo r con un valore qualsiasi, per esempio 5. Se r = 5 cm la circonferenza è 31,4 cm. La seconda misurerà 31,4 + 10 = 41,4 cm. Con la formula inversa conoscendo la circonferenza, calcoliamo il raggio. $r = \frac{41,4}{2\pi} = 6,6$ cm. La distanza tra le circonferenze è $r_2 - r_1 = 6,6 - 5 = 1,6$ cm.
Facciamo lo stesso procedimento con altri dati. Se $r_1 = 10$ cm la prima circonferenza misura 62,8 cm, la seconda è 72,8 cm e $r_2 = 11,6$ cm.
Ancora una volta la distanza tra le circonferenze è $11,6 - 10 = 1,6$ cm.
La distanza non varia.

C) Costruzione di un terzo esempio. Talvolta, dopo aver verificato l'uguaglianza delle distanze si procede con un terzo esempio o, più spesso, si dichiara di aver fatto altri esempi (PR cat. 9), come se si percepisse che i due esempi non siano sufficienti.

PER TROVARE IL RISULTATO ABBIAMO PROVATO A DISEGNARE ALTRE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE, LE CUI LUNGHEZZE DIFFERISCONO DI 10 cm, CALCOLANDO IL LORO RAGGIO.

ESEMPIO:

ABBIAMO SUPPOSTO CHE IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA PIÙ PICCOLA MISURI 4 cm. IPOTIZZATA LA MISURA DEL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA PIÙ PICCOLA ABBIAMO CALCOLATO TALE CIRCONFERENZA.

$C_1 = 4 \cdot 2\pi = 25,12$ cm MISURA DELLA CIRCONFERENZA MINORE

CALCOLATA LA MISURA DELLA CIRCONFERENZA MINORE ABBIAMO AGGIUNTO A QUESTA 10 cm OTTENENDO COSÌ LA LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA MAGGIORE.

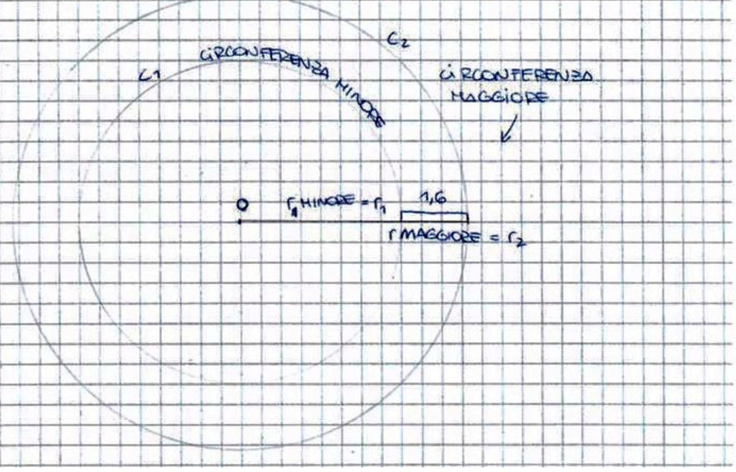
$C_2 = 25,12 + 10 = 35,12$ cm LUNGHEZZA CIRCONFERENZA MAGGIORE

PER TROVARE IL RAGGIO ABBIAMO UTILIZZATO LA FORMULA INVERSA UTILIZZATA IN PRECEDENZA PER CALCOLARE LA CIRCONFERENZA MINORE.

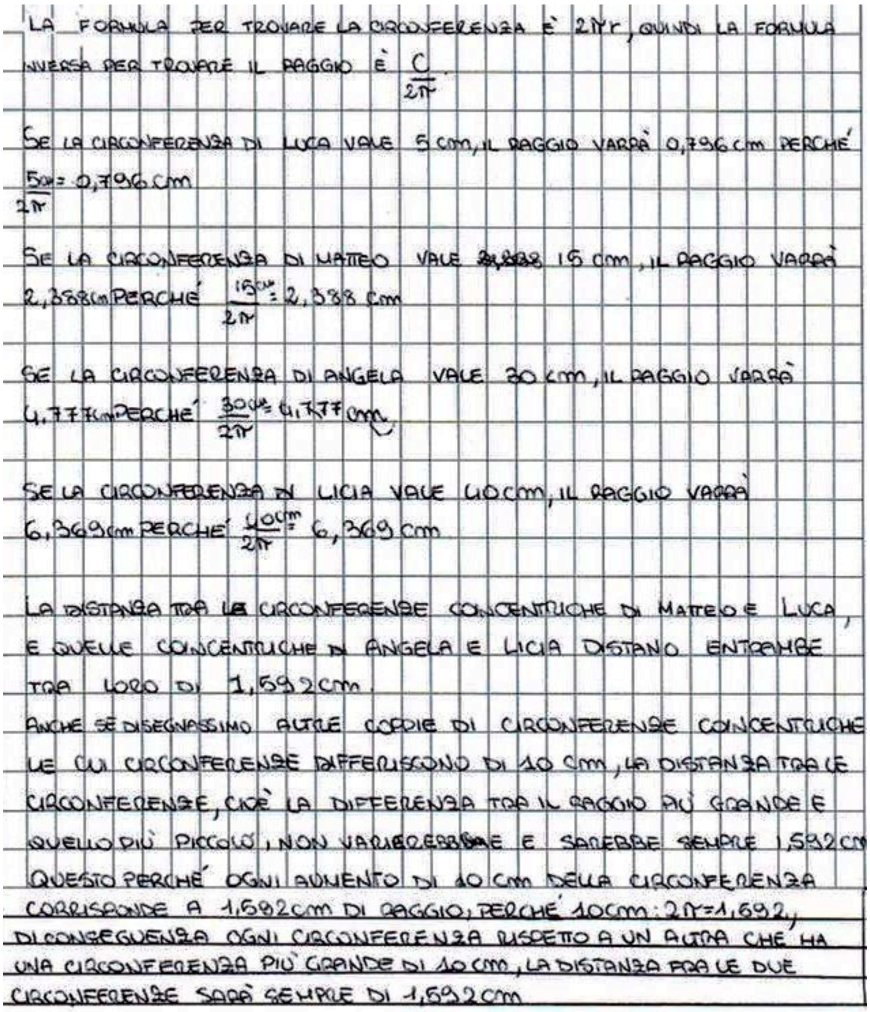
$r_2 = \frac{C_2}{2\pi} = \frac{35,12}{2 \cdot \pi} = 5,59 \approx 5,6$ cm LUNGHEZZA DEL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA MAGGIORE

IN SEGUITO ABBIAMO CALCOLATO LA DIFFERENZA TRA I DUE RAGGI, CHE FACENDO ALTRI ESEMPI COME QUESTO, È UGUALE PER TUTTE LE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE, LA QUALE UNA È PIÙ LUNGA DELL'ALTRA DI 10 cm

$5,6 - 4 = 1,6$ cm



In qualche caso si considera una successione di coppie di circonferenze concentriche (PR cat. 9).


LA FORMULA PER TROVARE LA CIRCONFERENZA È 2πr, QUINDI LA FORMULA INVERSA PER TROVARE IL RAGGIO È $\frac{C}{2\pi}$.

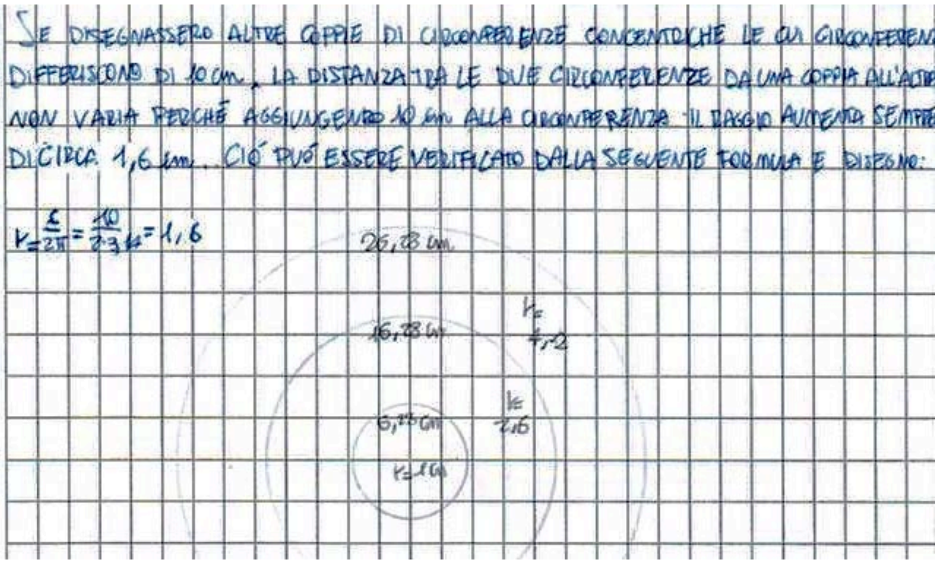
SE LA CIRCONFERENZA DI LUCA VALE 5 cm, IL RAGGIO VARRÀ 0,796 cm PERCHÉ $\frac{5cm}{2\pi}$ = 0,796 cm

SE LA CIRCONFERENZA DI MATTEO VALE 15 cm, IL RAGGIO VARRÀ 2,388 cm PERCHÉ $\frac{15cm}{2\pi}$ = 2,388 cm

SE LA CIRCONFERENZA DI ANGELA VALE 30 cm, IL RAGGIO VARRÀ 4,777 cm PERCHÉ $\frac{30cm}{2\pi}$ = 4,777 cm

SE LA CIRCONFERENZA DI LICIA VALE 40 cm, IL RAGGIO VARRÀ 6,369 cm PERCHÉ $\frac{40cm}{2\pi}$ = 6,369 cm

LA DISTANZA TRA LE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE DI MATTEO E LUCA, E QUELLE CONCENTRICHE DI ANGELA E LICIA DISTANO ENTRAMBE TRA LORO DI 1,592 cm.
ANCHE SE DISEGNASSIMO ALTRE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE LE CUI CIRCONFERENZE DIFFERISCONO DI 10 cm, LA DISTANZA TRA LE CIRCONFERENZE, CIOÈ LA DIFFERENZA TRA IL RAGGIO PIÙ GRANDE E QUELLO PIÙ PICCOLO, NON VARIEREBBE E SAREBBE SEMPRE 1,592 cm
QUESTO PERCHÉ OGNI AUMENTO DI 10 cm DELLA CIRCONFERENZA CORRISPONDE A 1,592 cm DI RAGGIO, PERCHÉ 10 cm : 2π = 1,592,
DI CONSEGUENZA OGNI CIRCONFERENZA RISPETTO A UN ALTRA CHE HA UNA CIRCONFERENZA PIÙ GRANDE DI 10 cm, LA DISTANZA FRA LE DUE CIRCONFERENZE SARÀ SEMPRE DI 1,592 cm


SE DISEGNASSERO ALTRE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE LE CUI CIRCONFEREN[ZE] DIFFERISCONO DI 10 cm, LA DISTANZA TRA LE DUE CIRCONFERENZE DA UNA COPPIA ALL'ALTR[A] NON VARIA PERCHÉ AGGIUNGENDO 10 cm ALLA CIRCONFERENZA IL RAGGIO AUMENTA SEMPRE DI CIRCA 1,6 cm. CIÓ PUÓ ESSERE VERIFICATO DALLA SEGUENTE FORMULA E DISEGNO:

$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}6$

Molto spesso si dice a parole di aver fatto vari tentativi, ma se ne riporta solo qualcuno. Ad esempio:
- in un elaborato (SI cat. 9), gli allievi scrivono: *"Sì, facendo numerosi tentativi con le indicazioni dateci dal problema, siamo arrivati a concludere che la distanza tra le due circonferenze non cambia. La distanza secondo noi è di 1,6 cm e abbiamo visto che si ripete facendo i tentativi"*. Segue poi un esempio numerico in cui il raggio della circonferenza minore è di 7 cm e si calcola correttamente la distanza tra le due circonferenze. Si termina con la frase: *"Questo risultato si è ripetuto tutte le volte che abbiamo tentato di risolvere il problema"*.
- in un altro (SI cat. 9), si trova scritto *"Due circonferenze concentriche, una di 10 cm più lunga dell'altra, avranno sempre la stessa distanza una dall'altra. Per dimostrare quanto affermato prima abbiamo fatto dei calcoli pratici"*. Seguono tre esempi con r = 2, r = 5 e r = 1 e poi si conclude così: *"Abbiamo inventato le*

lunghezze dei raggi e abbiamo trovato nei vari casi la stessa distanza". [e questo sembra essere sufficiente per ritenere vero il risultato in generale...]
In due elaborati di cat. 9 (SI) che hanno seguito questa procedura si è riscontrato un errore nell'interpretazione della condizione "due circonferenze concentriche di cui una più lunga dell'altra di 10 cm" che ha portato a determinare il valore 5 come differenza dei raggi. L'errore è dovuto al non aver saputo scrivere correttamente l'aumento di 10 cm della seconda circonferenza rispetto alla prima [formalmente da $C = 2\ r\ \pi$ per la circonferenza iniziale, si è passati a $C_1=(2\ r + 10)\ \pi$ (e non a $C_1=2\ r\ \pi + 10$) per la circonferenza maggiore].

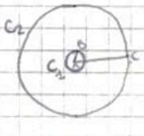
D) In pochi ma significativi elaborati si trova una dimostrazione generale della proprietà, fatta mediante l'introduzione di simboli come c_L, c_M per le circonferenze di Luca e Matteo e relazioni tipo $c_M = c_L+10$ oppure l'indicazione delle lunghezze delle due circonferenze con x, x+10 utilizzando il più familiare simbolo "x" per la quantità variabile. In questi casi non c'è traccia di calcoli con esempi numerici (segno della convinzione che il ragionamento generale non necessita di ulteriori conferme) e la distanza costante fra le varie coppie di circonferenze viene lasciata nella forma simbolica $5/\pi$ o $10/(2\pi)$ (PR cat. 9).

Quando 2 circonferenze concentriche, la prima di lunghezza x e la seconda lunghezza x+10, per trovare la distanza tra le due si deve fare la differenza tra i raggi. Per trovare il primo raggio si usa la formula inversa $r = \frac{x}{2\pi}$ e per trovare il raggio della ~~circonferenza~~ seconda $r = \frac{x+10}{2\pi}$ La distanza è dunque

$$\frac{x+10}{2\pi} - \frac{x}{2\pi} = \frac{\cancel{x}+10-\cancel{x}}{2\pi} = \left|\frac{10}{2\pi}\right|$$ quindi è costante.

In un caso si utilizzano due variabili: x per la circonferenza di Luca e y per quella di Angela e si imposta un'equazione che risulta indeterminata.
A Siena, si sono trovati negli elaborati due modi di procedere: nel primo si parte dal considerare che la differenza tra le misure delle due circonferenze è 10, si passa poi, applicando la formula della circonferenza, ad esprimere direttamente la differenza tra i raggi e a verificare che è costante; il secondo consiste nell'usare la formula della circonferenza per ricavare sia dalla circonferenza minore che dalla maggiore incrementata di 10 l'espressione dei rispettivi raggi, farne poi la differenza e constatare che non varia.
Si riporta di seguito un elaborato del primo tipo (SI cat. 9) nel quale si può notare la presenza di una scrittura formale non del tutto corretta, in cui compaiono insieme misure e lunghezze.

SPIEGAZIONE:



$C_1 = 2r \cdot \pi$

$C_2 = 2r \cdot \pi \rightarrow C_2 = C_1 + 10$ cm

Dato che il π è un numero fisso, quello in cui differiscono è il diametro, cioè 2r

10 cm = $(d_2 - d_1) \cdot \pi$

$d_2 - d_1 = 10 : \pi = 3{,}18$ cm

$r_2 - r_1 = 3{,}18 : 2 = 1{,}6$ cm

Di conseguenza, sapendo che il π non cambia, la differenza fra i raggi è sempre la stessa se una circonferenza è più lunga dell'altra di 10 cm, quindi non variano.

In un elaborato di Siena di categoria 10, si giunge alla conclusione corretta, utilizzando un ragionamento “per assurdo”:

“Se la distanza tra le due circonferenze variasse a seconda della loro lunghezza arriveremo ad una situazione dove le due circonferenze coincidono, perciò la distanza non diminuisce. Quindi la distanza tra le due circonferenze non varia a seconda della loro lunghezza”.

Si potrebbe pensare che gli allievi abbiano escluso che al crescere della circonferenza “più piccola” la distanza da quella concentrica, che differisce di 10 cm, non possa aumentare, ma semmai diminuire. Ma se ciò fosse vero, il raggio della circonferenza di partenza avrebbe un “valore limite” al di là del quale non si potrebbe costruire una circonferenza concentrica a questa di lunghezza maggiore di 10 cm, fatto palesemente assurdo.

Attività in classe con i due problemi

Come detto nel paragrafo “Indicazioni didattiche”, i due problemi, oggetto di questo approfondimento, si prestano bene ad attività di classe.

Il problema delle quattro circonferenze, proposto in una terza liceo scientifico (ipotetica cat. 11) da parte di Angela Rizza, in un lavoro in gruppo, ha prodotto più o meno le forme di risoluzione precedenti. Una discussione fra i gruppi ha però permesso di chiarire la profonda differenza fra la validità di un risultato ottenuto attraverso un certo numero, anche elevato, di esempi e la validità dimostrata in generale con il ricorso al calcolo letterale.

Si tratta di un salto cognitivo importante, che problemi opportuni potrebbero contribuire a sviluppare ai diversi livelli scolari, in modo da andare oltre l’enunciazione di proprietà solo tramite esempi.

Anche il problema delle due circonferenze è stato proposto in una classe (seconda liceo scientifico nella quale insegna Silvano Gregori), questa volta individualmente, alla quale hanno partecipato 16 studenti, nessuno dei quali ha fatto ricorso ad esempi numerici, attribuendo ai raggi una misura specifica.

Gli elaborati vengono qui presentati secondo sette tipologie di risposte.

Tipo A (5 studenti):

Gli studenti indicano con una lettera (C oppure x) la lunghezza della circonferenza più piccola e con $C + 10$ (o x+10) quella della circonferenza maggiore; determinano quindi le lunghezze di ciascuno dei due raggi, dividendo per 2π:

$$r_1 = \frac{C}{2\pi}$$

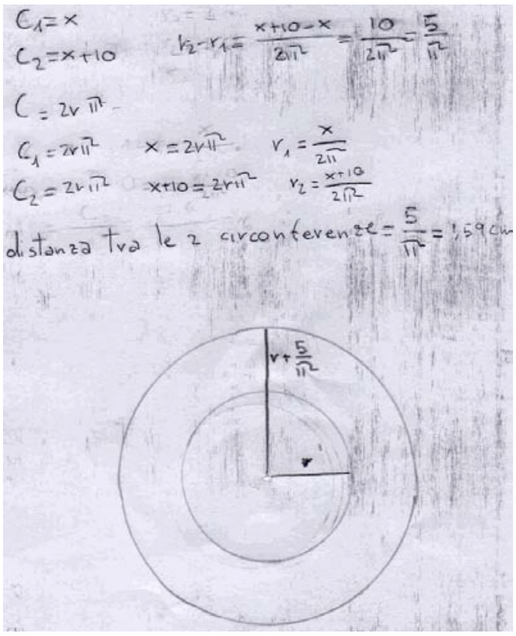
$$r_2 = \frac{C+10}{2\pi}$$

Dalla differenza fra le espressioni dei due raggi, trovano la distanza fra le circonferenze:

$$r_2 - r_1 = \frac{C+10}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{C+10-C}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ cm}$$

Variante (che non pare non così significativa): qualcuno trova prima i diametri, dividendo le lunghezze delle circonferenze per π; trovata la differenza fra i due diametri, la dimezzano per trovare la distanza fra le circonferenze.

Poi procedono al calcolo approssimato della distanza: 1,59 cm (due studenti) e 1,6 cm (due studenti). Uno si ferma all’espressione simbolica 5/π.



Tipo B (2 studenti)
Gli studenti indicano con x il raggio della circonferenza minore e scrivono le lunghezze delle due circonferenze:

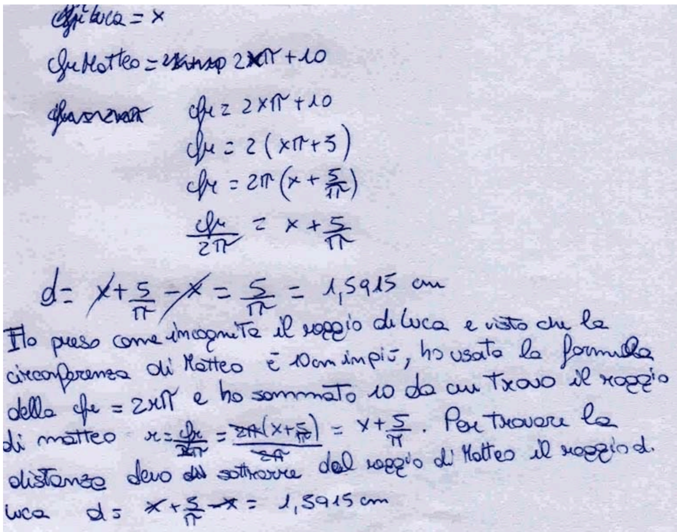
$$C_L = 2\pi x$$

$$C_M = 2\pi x + 10$$

Trovano poi il raggio della C_M: $\frac{C_M}{2\pi} = x + \frac{5}{\pi}$

E infine la distanza fra le due circonferenze: $d = x + \frac{5}{\pi} - x = \frac{5}{\pi}$

Calcolo approssimato della distanza: 1,59 cm (1 studente) e 1,5915 cm (1 studente)



Tipo C (3 studenti)
Indicati con r e R i due raggi, scrivono le misure delle due circonferenze: $C_1 = 2\pi r$ e $C_2 = 2\pi R$.

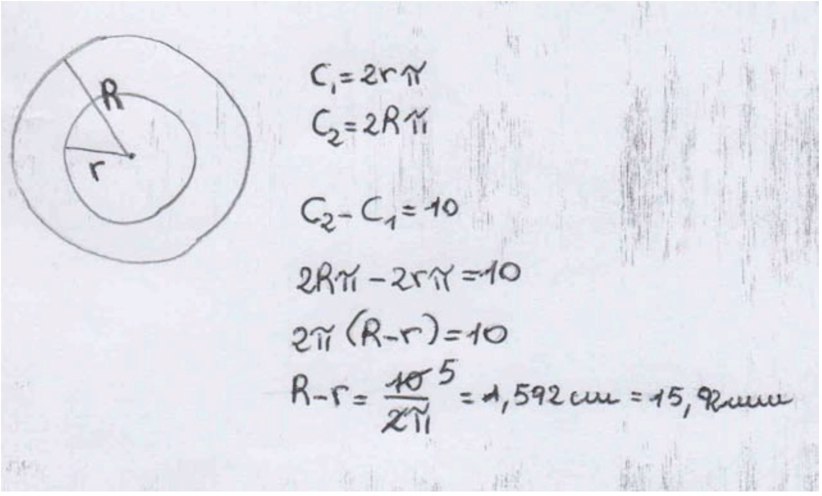
Allora, dato che $C_2 - C_1 = 10$:

$$2\pi R - 2\pi r = 10$$

$$2\pi\left(R - r\right) = 10$$

$$R - r = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$$

Calcolo approssimato della distanza: 1,592 cm (2 studenti), 15,9 mm (1 studente)



Tipo D (3 studenti)

Indicata con x la distanza fra le due circonferenze e con r (o con y) il raggio minore, procedono a determinare:

$$C = 2\pi r$$

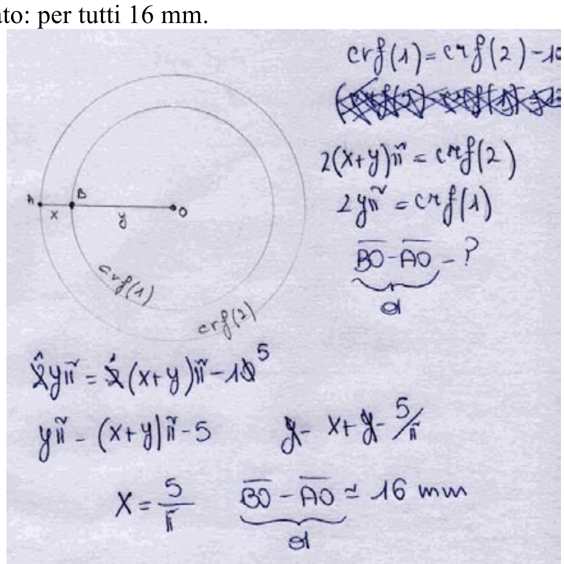
$$C' = 2\pi\left(r + x\right)$$

Successivamente traducono in equazione l'informazione che la seconda circonferenza supera la prima di 10 cm:

$$2\pi r + 10 = 2\pi\left(r + x\right)$$

Dalla risoluzione dell'equazione trovano $x = \dfrac{5}{\pi}$

Calcolo del valore approssimato: per tutti 16 mm.

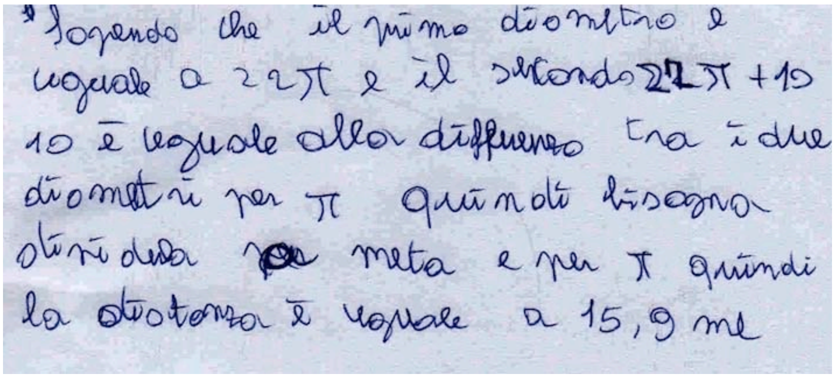


Tipo E (1 studente)

Con linguaggio esclusivamente verbale (impreciso, perché all'inizio usa il termine diametro per indicare la circonferenza) cerca (faticosamente, sia dal punto di vista ortografico che sintattico, nonché lessicale) di spiegare quanto trovato con formule scritte in brutta e non riportate sul foglio. Ragiona con formule, ma preferisce riportare la risposta in modo retorico:

- prima dichiara che le due circonferenze (ma scrive "diametri") sono lunghe 2π r e 2π r+10;
- quindi 10 è la differenza fra i due diametri, moltiplicata per π (si capisce che sta traducendo a parole 10 = π(2R – 2r), che non equivale, però, alla scelta fatta all'inizio riguardo l'uso di r);
- occorre allora dividere questa differenza (10) per 2 e per π, per trovare la distanza fra le circonferenze (qui è coerente con la seconda formalizzazione)

Calcolo del valore approssimato: 15,9 cm.

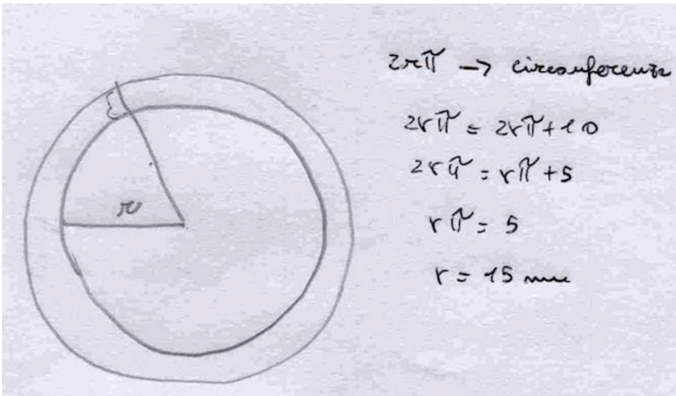


Tipo F (1 studente)

Traduce in modo errato la relazione fra le lunghezze delle due circonferenze: $2r\pi = 2r\pi + 10$, attribuendo ai due raggi la stessa lunghezza *r*. Seguono errori algebrici nella risoluzione dell'equazione impostata; trova un valore di *r* = 15 mm e non si capisce se lo studente pensa di aver trovato la distanza fra le due circonferenze o se sa che quello è il raggio.

Ovviamente non è chiaro a quale raggio faccio riferimento, dal momento che li ha indicati entrambi con *r*.

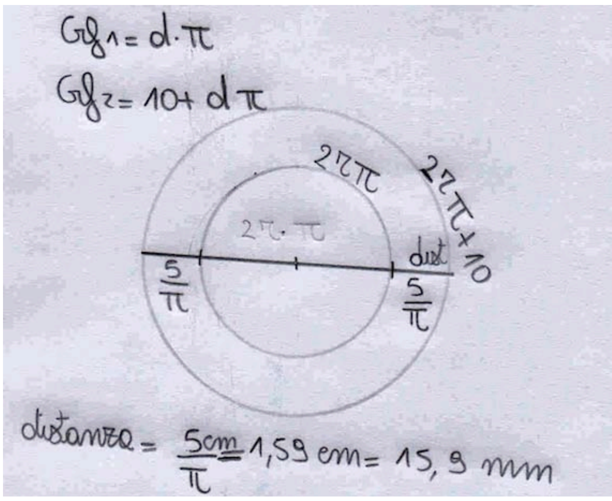
Spunto peraltro interessante per discutere con la classe le implicazioni di tale ambiguità.



Tipo G (1 studente)

Sulla figura scrive che le circonferenze hanno lunghezze 2π r e 2π r+10. A lato scrive che $C_1 = d\pi$ e $C_2 = 10 + d\pi$ Sempre sulla figura scrive che le due distanze fra circonferenze (sullo stesso diametro) sono lunghe $\frac{5}{\pi}$. Ma non ci sono spiegazioni né attraverso calcoli, né attraverso linguaggio verbale.

Calcolo approssimato della distanza: 15,9 cm.



Nella medesima classe è stato proposto, con un ampio intervallo, anche il problema delle quattro circonferenze.

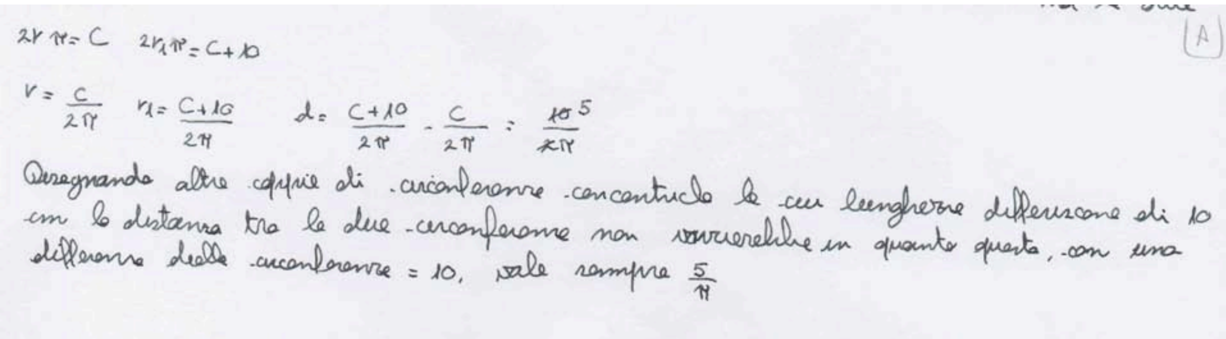
Problema delle quattro circonferenze: analisi degli elaborati e discussione con la classe, a cura di Silvano Gregori

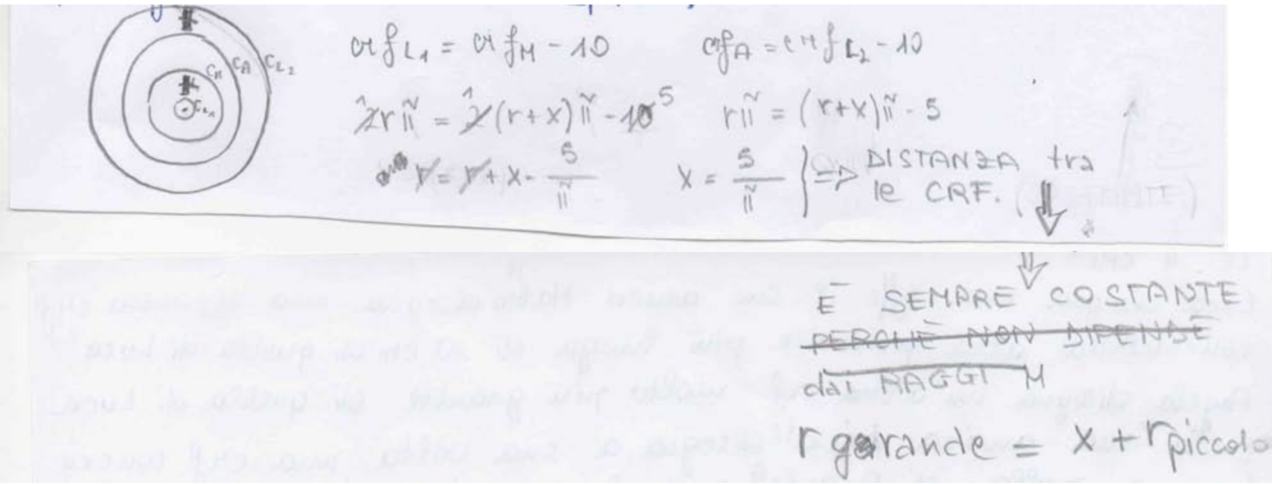
Svolgono il problema 17 studenti, 15 dei quali già hanno svolto il problema delle due circonferenze, più due precedentemente assenti.

I due punti cruciali nella dimostrazione richiesta agli studenti consistono:

1) nella consapevolezza che per affrontare il problema **in modo generale** è necessario attribuire alle circonferenze o ai raggi misure non specifiche, ma espresse in modo letterale
2) nel riconoscimento che l'elisione dei termini letterali (che siano misure dei raggi o delle circonferenze) sancisce l'indipendenza della distanza fra le circonferenze dalle misure delle stesse o dei loro raggi.

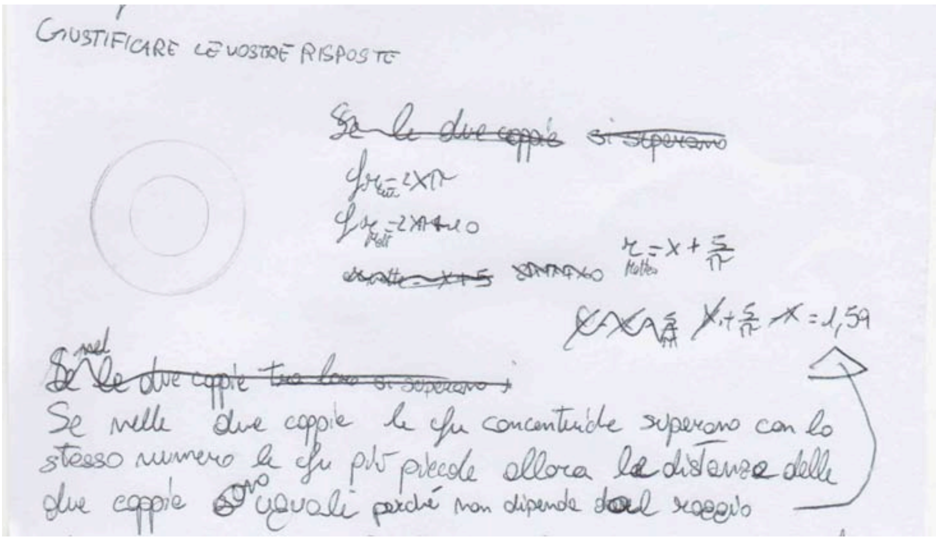
Risposte di tipo A' (7 studenti)
Gli studenti procedono adducendo motivazioni già utilizzate nelle risposte di tipo A o D al problema delle due circonferenze.



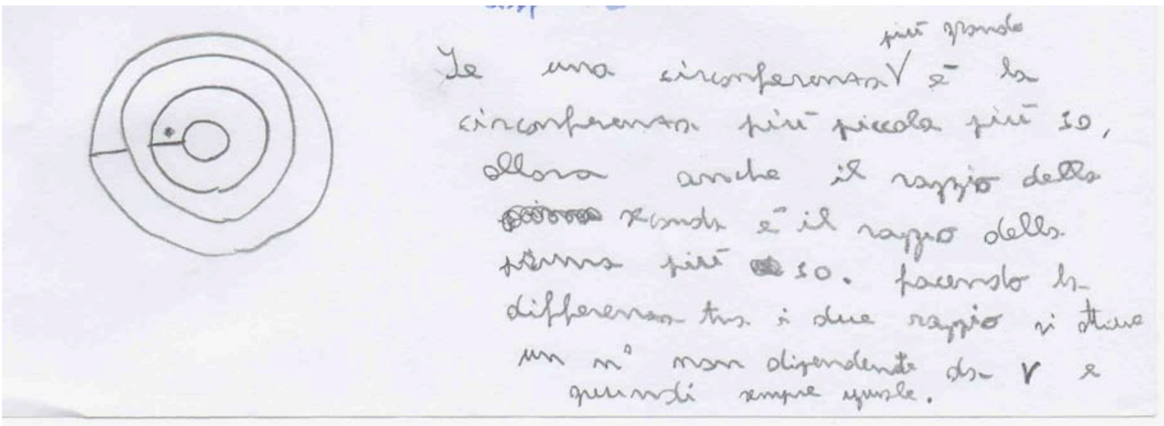


Sembrano consapevoli che l'uso di lettere *C* o *r* consenta una risoluzione generale del problema, permettendo di considerare tutte le possibili coppie di circonferenze, ma non lo affermano esplicitamente, salvo dichiarare alla fine che "*la distanza tra le due circonferenze… vale **sempre*** 5/π".
Non si fa alcun riferimento esplicito al significato dell'elisione di *r* o di *C* (il passaggio dell'elisione di *C*, a volte, è omesso, per saltare direttamente al risultato della distanza) o all'assenza dei termini letterali *r* e *C* nel risultato finale.

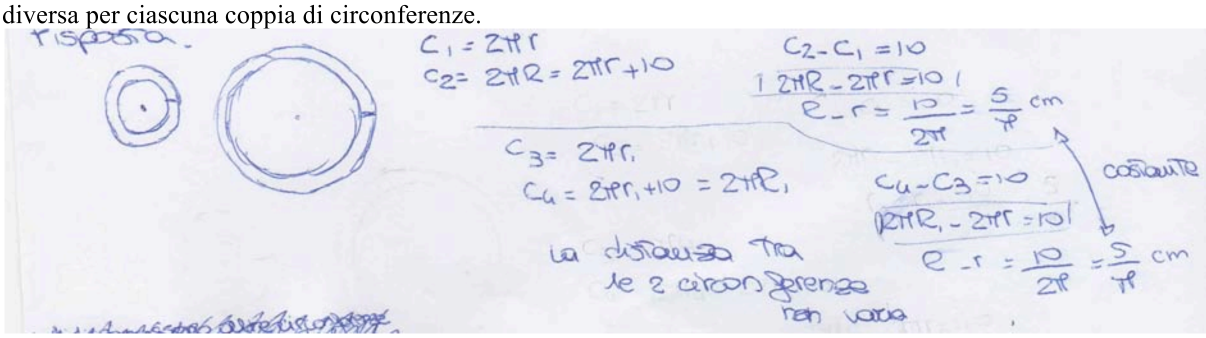
Risposte di tipo B' (2 studenti)
Questi studenti sono in grado di riconoscere ed esprimere a parole il fatto che l'elisione di *x* (raggio della circonferenza minore) significhi che "*la distanza delle due coppie… non dipende dal raggio*".



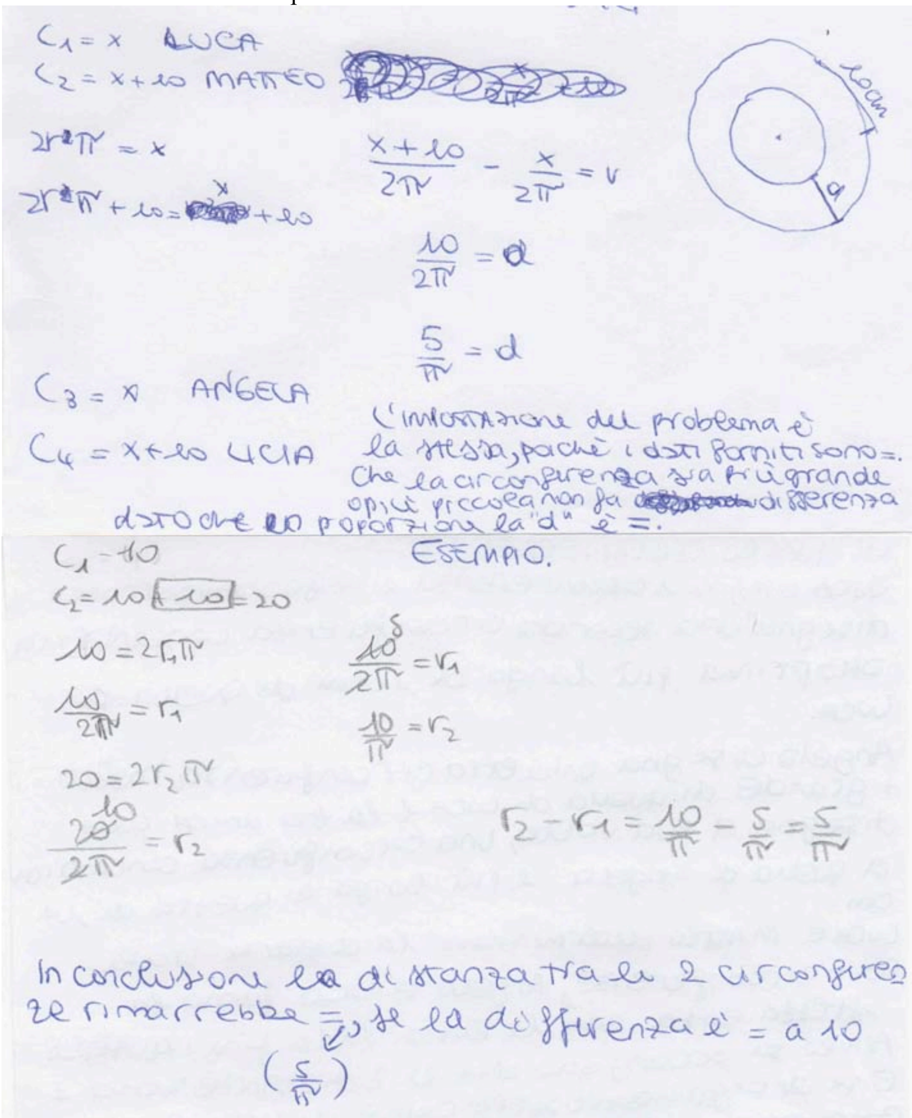
Nessun riferimento esplicito viene invece fatto riguardo al fatto che l'uso delle lettere permetta di considerare in modo generale tutte le possibili circonferenze.
Il secondo studente non risponde correttamente, ritenendo che la differenza di 10 cm fra le circonferenze si possa attribuire anche ai rispettivi raggi. Ma è chiara l'idea che "*facendo la differenza fra i due raggi si ottiene un numero non dipendente da r e quindi sempre uguale*"



Risposte di tipo C' (3 studenti)
Fanno uso del calcolo letterale, senza sfruttare appieno la sua generalità: infatti ripetono due volte il calcolo della distanza fra le circonferenze, con l'uso di lettere diverse, per arrivare in entrambi i casi allo stesso valore della distanza e concludere che "*la distanza fra le due circonferenze non varia*". Manca un'estensione esplicita del risultato a tutte le possibili coppie di circonferenze. Il loro approccio, in effetti, richiederebbe l'uso di una lettera diversa per ciascuna coppia di circonferenze.



Merita una particolare attenzione il caso di una studentessa che, dopo aver indicato con x la lunghezza della circonferenza di Luca e con $x + 10$ quella della circonferenza di Matteo, determina, pur con qualche confusione delle variabili r e d, la distanza $d = 5/\pi$. Inizia poi un discorso analogo per le circonferenze di Angela e Licia, ma si ferma dopo aver scritto $C_3 = x$ e $C_4 = x + 10$, osservando che "*l'impostazione del problema è la stessa, poiché i dati forniti sono uguali*" e che per questo si arriverà alla stessa d. La stessa studentessa ritiene, però, che la dimostrazione sia più convincente se corredata di un esempio numerico, nel quale attribuisce a C_1 la misura di 10 cm. Questa necessità di un esempio numerico evidenzia quanto la dimostrazione condotta a livello letterale abbia su di lei un potere di convincimento non pieno.



$C_1 = x$ LUCA
$C_2 = x + 10$ MATTEO

$2r^2\pi = x$

$2r^2\pi + 10 = x + 10$

$\frac{x+10}{2\pi} - \frac{x}{2\pi} = r$

$\frac{10}{2\pi} = d$

$\frac{5}{\pi} = d$

$C_3 = x$ ANGELA
$C_4 = x + 10$ LUCIA

L'impostazione del problema è la stessa, perchè i dati forniti sono =. Che la circonferenza sia più grande o più piccola non fa differenza dato che in proporzione la "d" è =.

ESEMPIO.

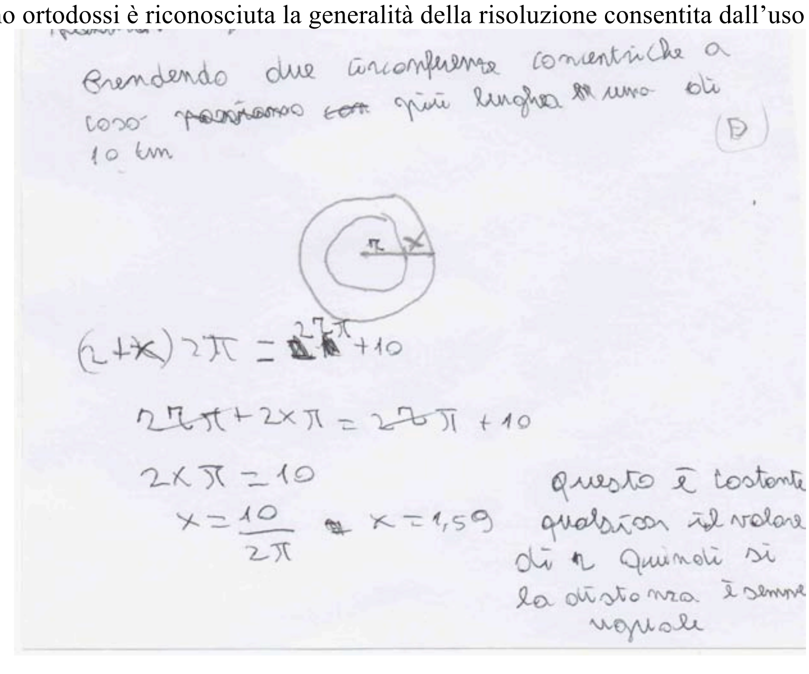
$C_1 = 10$
$C_2 = 10 + 10 = 20$
$10 = 2r_1\pi$
$\frac{10}{2\pi} = r_1$
$\frac{5}{\pi} = r_1$
$20 = 2r_2\pi$
$\frac{20}{2\pi} = r_2$
$\frac{10}{\pi} = r_2$

$r_2 - r_1 = \frac{10}{\pi} - \frac{5}{\pi} = \frac{5}{\pi}$

In conclusione la distanza tra le 2 circonferenze rimarrebbe = se la differenza è = a 10 $\left(\frac{5}{\pi}\right)$

Risposte di tipo D' (4 studenti)

In modi più o meno ortodossi è riconosciuta la generalità della risoluzione consentita dall'uso di termini letterali:



Prendendo due circonferenze concentriche a caso ~~poniamo~~ ~~con~~ più lunga di uno di 10 cm

(D)

$(r+x)2\pi = 2r\pi + 10$

$2r\pi + 2x\pi = 2r\pi + 10$

$2x\pi = 10$

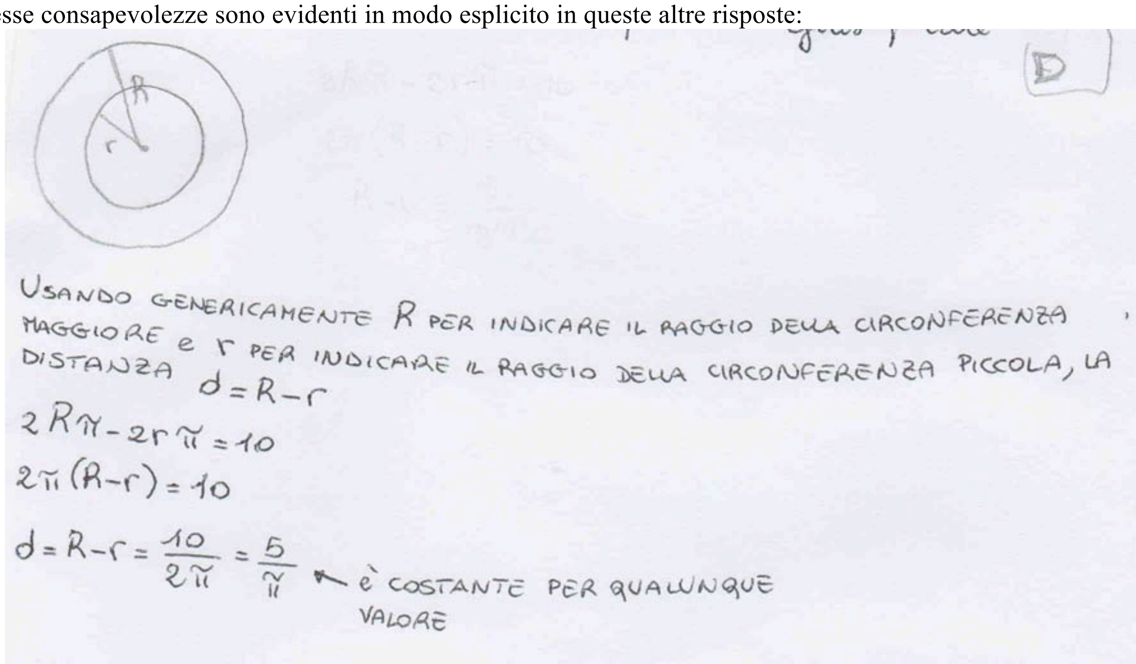
$x = \frac{10}{2\pi}$ $x = 1{,}59$

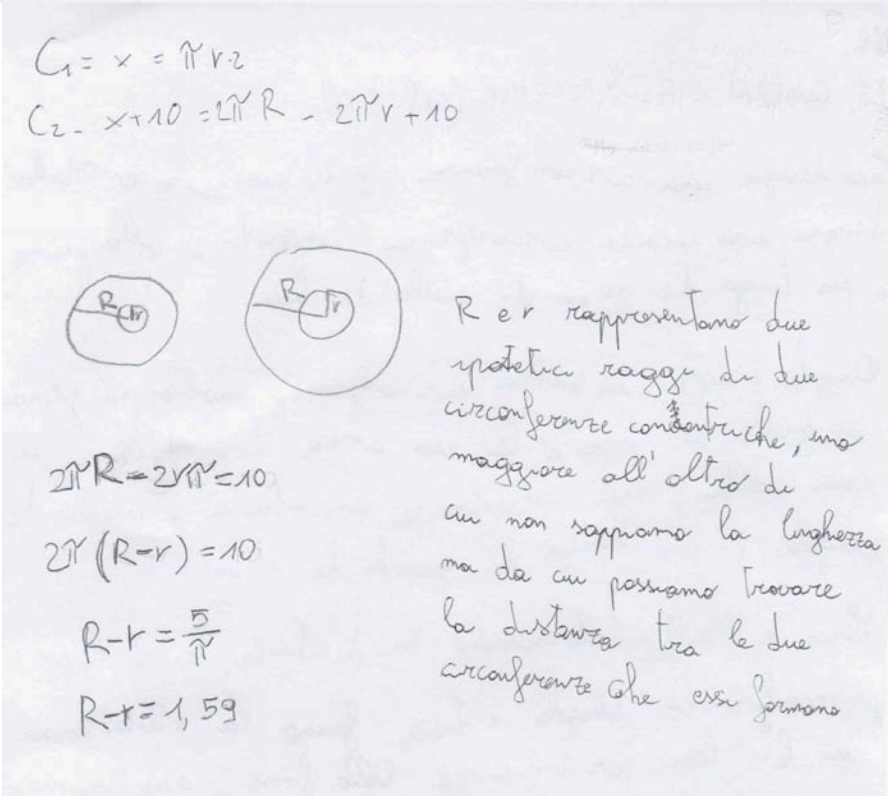
questo è costante qualsiasi il valore di r quindi si la distanza è sempre uguale

La frase "*Prendendo due circonferenze concentriche **a caso**…*" che precede la formalizzazione $(r+x)2\pi = 2r\pi + 10$ evidenzia la consapevolezza della generalità della risoluzione.

Inoltre, dal commento finale, è chiaro che lo studente riconosce nell'assenza di *r* dal risultato della distanza, l'indipendenza di *d* da *r*; ciò gli permette di concludere che "*Quindi la distanza è sempre uguale*".

Stesse consapevolezze sono evidenti in modo esplicito in queste altre risposte:





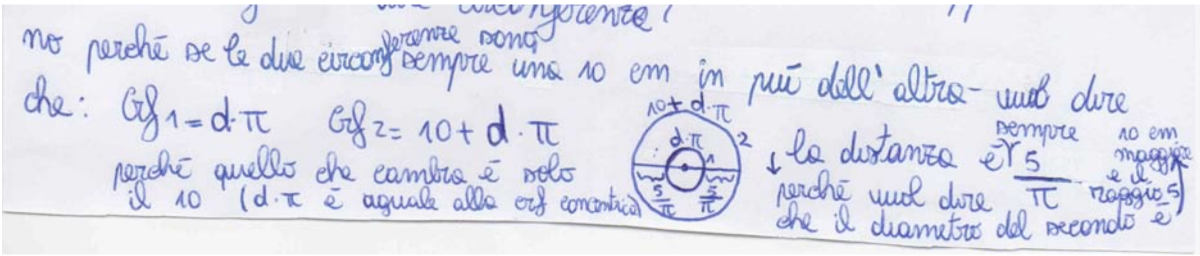
Anche nell'ultimo protocollo è chiaro che l'uso delle lettere permette di considerare due circonferenze arbitrarie, anche se il lessico utilizzato ("*R e r rappresentano due **ipotetici** raggi… di cui non sappiamo la lunghezza*") non è quello "ufficiale" e più appropriato.

Risposta di tipo E' (1 studente)

Lo studente è lo stesso della risposta di tipo G nel problema delle 2 circonferenze. In questo caso, accompagna a figure identiche a quelle del precedente problema, un tentativo di spiegazione:

$Crf_1 = d\pi$

Crf$_2$ = 10 + *d*π *perché quello che cambia è solo il 10 (d*π *è uguale alla crf concentrica)*
La distanza è sempre 5/π *perché vuol dire che il diametro del secondo è 10 cm maggiore e il raggio 5*


no perché se le due circonferenze sono sempre una 10 cm in più dell'altra - vuol dire
che: Crf1 = d·π   Crf2 = 10 + d·π
perché quello che cambia è solo
il 10 (d·π è uguale alla crf concentrica)
la distanza è sempre 5/π
perché vuol dire
che il diametro del secondo è 10 cm maggiore e il raggio 5

La spiegazione è evidentemente non corretta dal punto di vista formale e denota un'evidente incapacità di controllo morfo-sintattico del discorso, nel momento in cui sia richiesta un'argomentazione di tipo logico-matematico.
Lo studente non fa ricorso a calcoli numerici, né al calcolo letterale, ma utilizza per arrivare ad una conclusione corretta, nonostante non riesca a spiegare correttamente come ha ragionato, una motivazione da lui stesso poi meglio esplicitata durante la discussione con la classe avvenuta subito dopo.

Discussione con la classe
Durante la restituzione dei fogli con le risposte, prima ancora che io proponessi alla classe alcune domande sul problema appena proposto, una studentessa (appartenente al gruppo A') mi ha esplicitato l'esigenza di discutere su come potesse essere data una risposta esaustiva al problema. Occasione colta al volo.
Alla domanda "Avete trovato difficile questo problema?" è emerso chiaramente quanto questo problema fosse diverso da quello delle due circonferenze: nel primo problema, tutto sommato, era richiesto un numero (richiesta standard nella prassi scolastica). Qui era invece richiesto di dare una spiegazione convincente del fatto che la distanza fra le due circonferenze sia sempre la stessa per ogni coppia di circonferenze, in un contesto non standard di geometria. Il dubbio degli studenti risiede nel fatto che una spiegazione data mediante formule possa essere veramente una "spiegazione". Serve una mediazione verbale o è sufficiente scrivere in modo simbolico?
La mia risposta è stata più o meno questa: il linguaggio simbolico consente di tradurre in modo esatto e completo un'affermazione espressa in parole, con il vantaggio della sintesi, che permette una visione d'insieme che il linguaggio verbale spesso non consente, e dell'agilità di pensiero. All'agilità spesso concorre la possibilità di manipolare "meccanicamente" le formule con brevi passaggi, che sarebbero difficili e laboriosi da esprimere a parole. D'altro canto, la traduzione simbolica, nella sua sintesi estrema, rischia di non dare il giusto risalto ad alcuni aspetti: per questo alcuni passaggi della dimostrazione condotta in modo algebrico devono essere accompagnati da commenti espressi a parole.
Per far capire meglio che cosa intendessi, ho chiesto a qualche studente di scrivere alla lavagna la propria risposta. Ho scelto volutamente uno studente del gruppo di risposte C'.
Ho chiesto agli altri studenti se ritenessero necessario ripetere il calcolo della distanza per le circonferenze di Angela e Licia. La risposta, un po' disordinata, ma abbastanza unanime e convinta, è stata che l'uso delle lettere non lega ad una particolare circonferenza e che quindi la prima dimostrazione è già sufficiente anche per la seconda coppia di circonferenze e addirittura per tutte le coppie possibili. Ho quindi osservato che questo aspetto meritava di essere esplicitamente espresso nelle loro risposte.
Durante lo svolgimento dei calcoli per la determinazione della distanza, lo studente ha eliso i due termini corrispondenti alla misura della circonferenza minore. Ho chiesto che cosa significasse il fatto che i due termini "se ne andassero via". Lo studente non ha esitato a rispondere che il risultato di *d* è indipendente dalla variabile che si è cancellata. Anche in questo caso, ho aggiunto che questo fatto meritava di essere chiaramente scritto a commento del passaggio algebrico.
Ho poi chiamato la studentessa che ha aggiunto l'esempio numerico dopo la dimostrazione letterale (mentre rispondeva sul foglio, mi era venuta a chiedere se fosse meglio fare un esempio numerico: le avevo risposto di fare quello che ritenesse più idoneo per rispondere in modo esauriente): quando ha spiegato di aver aggiunto un esempio numerico, ho chiesto se tutti fossero d'accordo sul fatto che questo potesse rendere più "forte" la dimostrazione. Qualche studente ha osservato che così facendo si ritorna ad un caso particolare, allontanandosi dalla richiesta generale del problema.
Ho poi chiesto alla studentessa che mi aveva richiesto di poter discutere su come rispondere in modo esauriente, quali fossero le sue perplessità circa la sua risposta (secondo protocollo riportato sopra come esempio di risposte di tipo A'). La studentessa aveva notato l'indipendenza della distanza *d* dai raggi (conseguenza dell'elisione di *r*). Aveva scritto e poi cancellato barrandola questa osservazione. Le sembrava che ci fosse una contraddizione fra l'indipendenza finale da *r* e la dipendenza iniziale delle lunghezze delle due circonferenze da *r*. Le ho fatto osservare che la contraddizione fra dipendenza/non dipendenza da *r* era apparente: i soggetti sono diversi. Le lunghezze delle circonferenze sono dipendenti da *r*. La distanza fra le due circonferenze è invece indipendente da *r*. Una chiara distinzione dei soggetti permettere di risolvere la "contraddizione".

Infine ho chiesto allo studente che ha addotto la risposta di tipo F di spiegare meglio come fosse giunto a $d = 5/\pi$. Io ho capito questo (quella che riporto è un mio tentativo di tradurre meglio quello che lo studente faticava a dire bene a parole; lo studente mi ha confermato che è quello che intendeva): se per passare dal diametro alla circonferenza occorre moltiplicare il diametro per π, per tornare indietro, basta dividere per π. Se la differenza fra le due circonferenze è di 10, allora la differenza fra i due diametri è $10/\pi$. Allora fra i raggi c'è una differenza di $5/\pi$. Lo studente sta sfruttando, inconsapevolmente, la linearità dell'applicazione che fa passare dalla misura del diametro a quella della corrispondente circonferenza.
Volendo formalizzare:
$f : d \mapsto C$ è la biezione che associa ad ogni diametro la lunghezza della corrispondente circonferenza:
$f(d) = d \cdot \pi$
Per essa vale la proprietà delle applicazioni lineari: $f(x_1 \pm x_2) = (x_1 \pm x_2) \cdot \pi = x_1\pi \pm x_2\pi = f(x_1) \pm f(x_2)$
Per la funzione inversa
$f^{-1} : C \mapsto d$,
con $f^{-1}(C) = \dfrac{d}{\pi}$
vale, in modo analogo la proprietà $f^{-1}(x_1 - x_2) = f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)$.

Quindi la differenza fra i due diametri vale: $d_1 - d_2 = f^{-1}(C_1) - f^{-1}(C_2) = f^{-1}(C_1 - C_2) = f^{-1}(10) = \dfrac{10}{\pi}$
L'idea mi pare corretta e raffinata, ma difficile da esprimere senza un adeguato formalismo e linguaggio specifico.

Qualche suggerimento di tipo didattico

- Utilizzare l'algebra non come semplice strumento di calcolo, ma soprattutto come linguaggio per pensare in modo più agile e per dimostrare proprietà (con questa classe Silvano Gregori ha lavorato molto nel corso dell'anno precedente su semplici dimostrazioni del tipo "la somma di due pari è un pari", "la somma di due dispari è pari", "il quadrato di un pari è divisibile per 4", "la somma di tre numeri consecutivi è multiplo di 3", ecc.). Potrebbe essere utile confrontare una dimostrazione con linguaggio simbolico o una risoluzione di un'equazione con l'analoga dimostrazione condotta in termini puramente verbali (a questo proposito potrebbero essere utilizzate alcune "ragioni" tratte dai libri d'abaco, che mettano in risalto l'economia e l'agilità di calcolo e di pensiero permesse dall'algebra simbolica rispetto all'algebra esclusivamente retorica)
- Consolidare l'abitudine a leggere da quali variabili dipende un'altra variabile, ma anche da quali variabili essa non dipende. Questo può essere fatto anche in fisica. Numerose sono le occasioni nelle quali è più importante notare ciò che manca in una formula, piuttosto che ciò che è presente nella stessa. Per esempio l'indipendenza del periodo del pendolo semplice dalla massa del pendolo può essere letta nella formula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ notando l'assenza della massa *m* nella relazione. Numerosi sono i problemi geometrici o fisici nei quali è necessario introdurre un parametro che poi si semplifica nel corso dei calcoli.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

DE DEUX À QUATRE CERCLES

Groupe Zeroallazero[27] et Lucia Doretti[28]

L'approfondissement proposé ici est celui de la fiche de la Banque de problèmes concernant « Les deux cercles » et une de ses variantes « Les quatre cercles ».

Les deux cercles

Identification Rallye : 22.II.18
Catégories : 9, 10
Domaine : GP Géométrie plane, cercles
Famille de tâches : cercles concentriques, distance, approximation

Résumé

Calculer la distance entre deux cercles concentriques dont seule la différence de leurs longueurs est donnée : 10 cm.

Enoncé du problème

Luc dessine un cercle et son ami Matteo dessine un cercle concentrique dont la longueur mesure 10 cm de plus.

Quelle est-elle la distance entre les deux cercles ?

Exprimez le résultat au millimètre près et justifiez votre réponse.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Une des deux premières tâches est de percevoir sur le dessin de deux cercles concentriques la « distance entre les deux cercles » et de chercher à la définir comme celle d'un segment, partie d'un rayon commun dont les extrémités sont déterminées par les deux cercles.
- La seconde des tâches initiales est de comprendre que les « 10 cm de plus » ne sont pas représentés par un segment, dont on peut mesurer la longueur « à la règle » mais par un arc de cercle, difficile à mesurer
- Comprendre alors qu'il faudra effectuer des calculs de longueur de cercle, à partir d'exemples de constructions que l'on considère provisoires vu qu'on ne connaît ni les rayons des cercles ni, a fortiori, que le résultat sera indépendant des rayons !!

  Si l'on se rend compte, à partir d'un exemple, que la procédure est généralisable, il faudra alors justifier que la distance obtenue, $10/2\pi$ ou $5/\pi$, est indépendante des deux rayons choisis qui se soustraient dans l'expression précédente pour arriver à la différence donnée de 10 (cm).

  Si la distance entre les deux cercles n'est pas perçue comme une constante, passer à d'autres exemples choisissant d'autres mesures et, observant que les valeurs obtenues varient peu, en déduire que la distance ne devrait pas dépendre des cercles choisis et chercher à une généralisation.
- Si l'on dispose de connaissances algébriques, en désignant par r et R les rayons des deux cercles, on peut exprimer la relation entre leurs longueurs par $2\pi R = 2\pi r + 10$ et calculer alors la différence entre R et r à partir de $2\pi R - 2\pi r = 10$ pour arriver à $2\pi(R - r) = 10$, avec $(R - r) = 5/\pi$.

  Passer alors au calcul en choisissant par exemple la longueur des cercles 100 et 110 (en cm) qui donne $r = 100/2\pi$ ($\approx$ 15,9) et $R = 110/2\pi$ ($\approx$17,5) et la distance entre les deux cercles: $100/2\pi - 100/2\pi = (110 - 100)/2\pi = 10/2\pi = 5/\pi$ ($\approx$1,6).

Les savoirs mobilisés sont la connaissance du rapport entre la longueur d'un cercle et son rayon, la maîtrise des formules algébriques correspondantes, le passage d'écritures décimales approximatives aux nombres irrationnels, la capacité de conduire une argumentation rigoureuse (justification) sur l'indépendance de la distance entre les cercles et leurs rayons pour tout agrandissement ou réduction de la figure.

Mots-clés

Cercle, rayon, cercles concentriques, distance entre deux cercles, généralisation, définition, approximation

---

[27] Membres actuels du groupe : Maria Felicia Andriani, Clara Bisso, Serafina Foglia, Silvano Gregori, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi, Angela Rizza, Vincenza Vannucci.

[28] Une des coordinatrices de la Section de l'ARMT de Sienne.

Points attribués

Sur 258 classes de 8 sections

Points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 9	71	18	23	14	19	**145**	**1.3**
Cat. 10	37	6	13	17	40	**113**	**2.2**
Tot	**108**	**24**	**36**	**31**	**59**	**258**	**1.6**

en %

Cat. 9	49%	12%	16%	10%	13%
Cat. 10	33%	5%	12%	15%	35%
Tot	**42%**	**9%**	**14%**	**12%**	**23%**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte (1,6 cm) avec justification de cette valeur dans le cas général

3 Réponse correcte avec justification basée sur plus d'un exemple

2 Réponse correcte avec justification basée sur un seul exemple
ou bien réponse erronée due à une erreur de calcul

1 Réponse correcte sans explication

0 Incompréhension du problème

Procédures et obstacles et erreurs relevés

Les tableaux ci-dessus mettent en évidence la progression des « 4 points » de la catégorie 9 à la catégorie 10, qui témoigne d'une justification correcte de la valeur pour le cas général.
Les « 3 points » qui attestent d'une explication basée sur plus d'un exemple sont peu nombreux ; alors qu'il semble que peu de copies ne présentent qu'un seul exemple.
Una partie importante de copies blanches révèle les difficultés à affronter un problème au contenu mathématique riche où il y a un « manque » apparent de données. En effet, ceci se révèle être l'obstacle majeur à la résolution du problème.
Le « cœur » du problème est la validité générale (indépendance des rayons des cercles) de la mesure de la distance entre les deux cercles. Cette généralisation justifie le « manque » apparent de données, considéré par les élèves comme un obstacle et, dans de nombreux cas, esquivé en attribuant arbitrairement une valeur au rayon. Les élèves qui résolvent le problème de cette façon, c'est-à-dire en raisonnant seulement sur un exemple, ne semblent pas avoir conscience qui leur réponse est seulement partielle et que leur raisonnement n'a pas la validité d'une justification générale.
D'autre part, pour généraliser il faut être capable d'attribuer des paramètres littéraux aux grandeurs en question, et de procéder en utilisant les instruments du calcul littéral. Le manque d'habitude de résoudre des situations problématiques à ces niveaux scolaires avec ce type d'instruments a sans doute influencé les résultats. En outre de telles procédures peuvent conduire à des erreurs dérivant de différentes difficultés selon que l'on utilise une ou deux lettres pour les indéterminées. Dans le premier cas il faut maîtriser les fractions algébriques, dans le second cas il faut aussi se rendre compte que l'équation posée n'a pas deux inconnues parce que c'est la différence des rayons que l'on doit trouver.
Une dernière difficulté concerne l'expression « distance entre les deux cercles » qui n'est probablement pas définie formellement en classe ; les élèves pourraient cependant induire la signification de cette expression d'après la notion similaire déjà rencontrée comme, en particulier, la distance entre deux droites parallèles, en tant que longueur du segment le plus court reliant un point d'un cercle à un point de l'autre.
Enfin, le troisième aspect problématique est celui de l'approximation, souvent sous-entendu et non abordé explicitement dans la pratique scolaire.

Indications didactique

Comme on le voit dans la rubrique « Procédures, obstacles et erreurs » les aspects mathématiques de ce problème sont multiples et méritent d'être approfondis par un travail en classe. Examinons par le détail les trois principaux aspects.

Généralisation
Le défi de ce problème ne concerne pas tant l'application correcte de la relation entre la longueur du cercle et son rayon pour arriver à la distance entre les deux cercles, mais bien la capacité de développer un raisonnement généralisé. En fait, là où l'on se limite à un seul exemple (mais aussi à différents exemples) on ne se rend pas compte que la procédure est généralisable et que la réponse, « apparemment » correcte, est plutôt « abusive ». Un usage opportun de ce problème en classe avec une mise en commun des procédures, mais aussi des blocages, représente une belle opportunité d'apprentissage : le recours à des exemples peut faire entrevoir une solution, mais ne la justifie pas et il devient nécessaire d'apprendre à généraliser une procédure. Il faut que l'enseignant stimule la nécessité de généralisation, dans le cas où les élèves n'en ressentent pas l'exigence. Les occasions sont nombreuses où l'enseignant peut inciter les élèves à le faire, à partir de l'école primaire ; par exemple lors de réflexions sur les propriétés des opérations ou sur les formules géométriques, ou à un niveau plus évolué avec les propositions de problèmes qui ont une solution pour certaines valeurs des nombres qui n'est plus valable à partir d'un certain point. Un exemples est l'expression $n^2 - n + 41$ qui donne des nombres premiers pour toute valeur naturelle des nombres naturels n inférieur à 41, mais qui, pour $n = 41$ donne le nombre 41^2 qui n'est pas premier. Il faut cependant remarquer ici que la formulation de la demande du problème et de la consigne ne requièrent pas explicitement la généralisation et focalisent l'attention sur la mesure de la distance (qui est un nombre).
Ceci entraîne la nécessité d'une nouvelle formulation du problème qui sera présentée par la suite.

Définitions
La « distance entre les cercles » peut être l'occasion d'approfondir le concept de définition : chercher et confronter différentes définitions d'un même objet mathématique, essayer d'inventer de nouvelles définitions ou d'en généraliser d'autres. Dans ce cas spécifique de la distance entre deux cercles, chercher à exprimer la définition puis à la généraliser à d'autres courbes. Il s'agit d'une activité qui sensibilise les élèves à la réflexion sur la rigueur du langage et à la nécessité de s'accorder sur les termes.

Approximation
Le problème peut être l'occasion de réfléchir sur cet aspect important et souvent négligé : Que signifie « approcher à moins d'un millimètre » ? Quelle est la différence entre exprimer le résultat du problème sous la forme $5/\pi$ ou 1,6 ou encore 1,59 ? Pour obtenir le résultat demandé, 1.6 cm faut-il prendre 3,14 comme approximation de π ou pourrait-on se contenter de 3,1 ? Dans d'autres contextes (par exemple si la demande était de donner une approximation à moins qu'un nanomètre) l'approximation habituelle de π par 3,14 serait-elle correcte ? Ce sont des questions qui pourraient émerger d'une discussion en classe sur le problème et qui pourraient favoriser une meilleure compréhension du concept de nombre irrationnel afin de faire percevoir la nécessité d'une approximation correcte dans des contextes concrets.

Des deux aux quatre cercles

Au vu des difficultés évoquées dans les paragraphes précédents, en particulier à propos de la généralisation et de l'approximation, nous avons élaboré une variante du problème, qui propose la confrontation entre deux couples de cercles de rayons différents et qui élimine la demande de l'expression numérique de la distance pour éviter le recours à l'approximation.
Dans une première formulation, l'énoncé était le suivant :

LES QUATRE CERCLES (version I) (Cat. 9, 10)

Luc dessine un cercle et son ami Matteo dessine un second cercle de même centre que le premier et dont la longueur mesure 10 cm de plus que celui de Luc.

Angela dessine un autre cercle de même centre beaucoup plus grand que celui de Luc et son amie Licia dessine un autre cercle de même centre que celui d'Angela, dont la longueur mesure aussi 10 cm de plus.

Entre les deux cercles des garçons et les deux cercles des filles la distance sera-t-elle toujours la même ou non ?

Justifiez votre réponse, avec le détail des calculs que vous avez faits.

Les discussions au sein du groupe ont conduit à une modification de l'énoncé par l'introduction d'une dernière demande pour favoriser le passage à une généralisation :

LES QUATRE CERCLES (version II) (Cat. 9, 10)

Luc dessine un cercle et son ami Matteo dessine un second cercle de même centre que le premier et dont la longueur mesure 10 cm de plus que celui de Luc.

Angela dessine un autre cercle de même centre beaucoup plus grand que celui de Luc et son amie Licia dessine un autre cercle de même centre que celui d'Angela, dont la longueur mesure aussi 10 cm de plus.

Luc et Matteo déterminent la distance entre leurs deux cercles, Angela et Licia font la même chose avec leurs cercles. À la fin les quatre amis s'aperçoivent que les deux distances sont égales.

Entre les deux cercles des garçons et les deux cercles des filles la distance sera-t-elle toujours la même ou non ?

Et s'ils dessinaient d'autres couples de cercles concentriques dont les longueurs diffèrent de 10 cm, la distance entre les deux cercles d'un couple à l'autre varierait-elle ?

Justifiez votre réponse.

Enfin, il a été décidé, avec les responsables de la deuxième épreuve du 24^{e} RMT, dans laquelle serait inséré le problème, d'éliminer une des deux demandes (en accord aussi avec les critères d'élaboration des problèmes définis entre temps) pour se concentrer sur la question de la validité générale du résultat.

LE QUATTRE CERCLES (version définitive) (Cat. 9, 10)

Luc dessine un cercle et son ami Matteo dessine un second cercle de même centre que le premier et dont la longueur mesure 10 cm de plus que celui de Luc.

Angela dessine un autre cercle de même centre beaucoup plus grand que celui de Luc et son amie Licia dessine un autre cercle de même centre que celui d'Angela, dont la longueur mesure aussi 10 cm de plus.

Luc et Matteo déterminent la distance entre leurs deux cercles, Angela et Licia font la même chose avec leurs cercles. À la fin les quatre amis s'aperçoivent que les deux distances sont égales.

Et s'ils dessinaient d'autres couples de cercles concentriques dont les longueurs diffèrent de 10 cm, la distance entre les deux cercles d'un couple à l'autre varierait-elle ?

Justifiez votre réponse.

Analyse des procédures utilisées

Bien que les résultats globaux ne soient pas très différents de ceux relatifs au problème des deux cercles – il ne s'agit évidemment pas des mêmes élèves et il n'a pas de sens de faire une comparaison significative – il peut être intéressant de constater qu'un certain nombre de copies font clairement référence à la généralisation.
Comme dans le cas du problème des deux cercles, on remarque une amélioration de la catégorie 9 à la catégorie 10.
Certainement quelques-unes des difficultés mises en évidence auparavant, par exemple *pour généraliser il faut être capable d'attribuer des paramètres littéraux aux grandeurs en question, et de procéder en utilisant les instruments du calcul littéral. Le manque d'habitude de résoudre des situations problématiques à ces niveaux scolaires avec ce type d'instruments a sans doute influencé les résultats. En outre de telles procédures peuvent conduire à des erreurs dérivant de différentes difficultés selon que l'on utilise une ou deux lettres pour les indéterminées* ont été également observées dans les nombreuses copies issues de la nouvelle version du problème.

Au sujet de la problématique de la généralisation, l'analyse des 78 copies de Parme et des 75 de Sienne, ces dernières analysées par Lucia Doretti, met en évidence différents types de raisonnement qui pourraient être conçus dans la perspective d'une progression intéressante.

A) Simple observation que si une grandeur varie, l'autre varie aussi de la même manière. On évoque la proportionnalité, mais il s'avère difficile d'évaluer si elle est perçue correctement c'est-à-dire comme proportionnalité entre la différence des longueurs de deux cercles et la différence des rayons. En particulier il est difficile d'évaluer l'opération $10/(2\pi) = 1{,}59$ sans autres commentaires ni calculs : on n'arrive pas à savoir si 10 est perçu comme la longueur d'un cercle ou comme la différence entre les longueurs des deux cercles (PR 9014).

Si perché $(10 : k) = \frac{10 : 3,14}{2} = 1,59$

1,59 = distanza tra le circonferenze concentriche che [illegible] di 10 cm

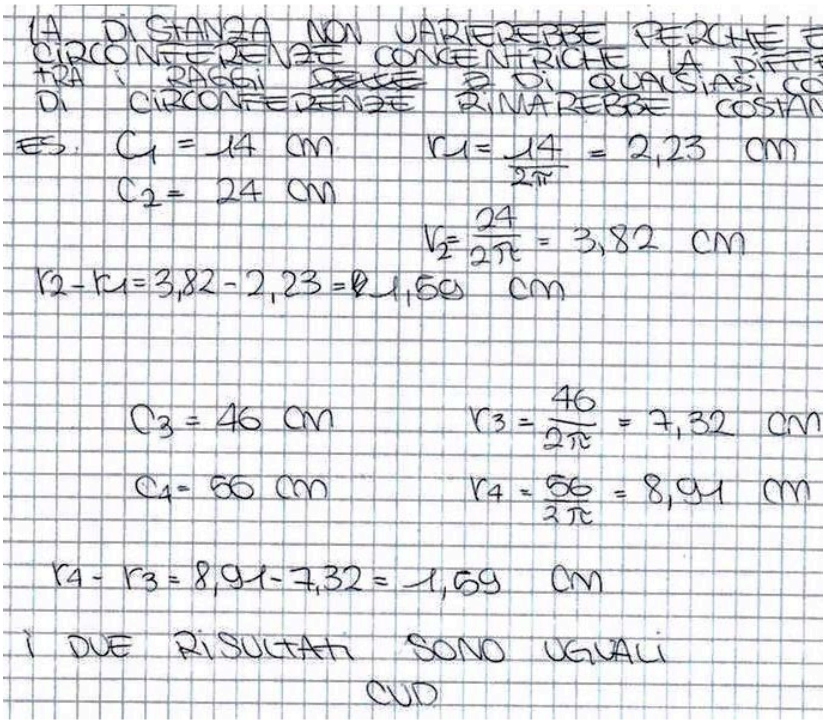
Dans une copie de catégorie 9 (SI) on part de la proportionnalité entre cercle et rayon pour affirmer, de manière générale, qu'une augmentation de 10 cm de la longueur d'un cercle conduira à une augmentation proportionnelle du rayon de ce cercle, mais on reste à un niveau intuitif, sans exprimer la rapport de proportionnalité.

Se prendiamo in considerazione la formula per il calcolo della circonferenza, ovvero $2r\pi$, possiamo intuire che l'unica variabile in tale formula è il raggio (r). Dato che la circonferenza e il raggio sono direttamente proporzionale, all'aumento di 10 cm della circonferenza ne conseguirà un aumento proporzionale del raggio della tale circonferenza, per qualsiasi essa sia. In conclusione la distanza tra le 2 circonferenze concentriche che differiscono di 10 cm non varierà mai.

(Trad. *Si on prend en considération la formule pour le calcul de la circonférence, 2πr, on peut déduire que l'unique variable de cette formule est le rayon (r). Etant donné que le rayon et la circonférence sont dans la même proportionnalité, à l'augmentation de 10 cm de la circonférence correspondra une augmentation proportionnelle du rayon de cette circonférence, quelle qu'elle soit. En conclusion la distance entre les deux cercles concentriques dont les longueurs diffèrent de 10 cm ne variera pas.)*

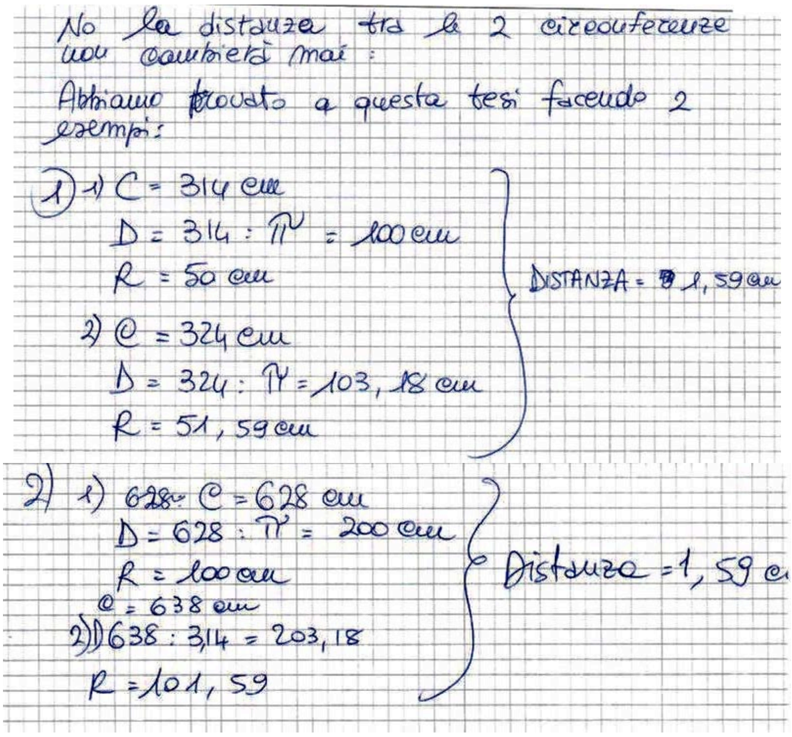
Dans d'autres copies de Sienne, on ne trouve que des phrases qui parlent de proportionnalité de façon générique mais sans rien ajouter d'autre, comme celle-ci : *Pour nous, la distance entre les deux cercles ne varie pas parce que la distance est directement proportionnelle.*

B) Construction de deux exemples numériques, probablement selon la conviction qu'ils suffisent à garantir la généralisation du résultat (voir le mot « qualsiasi » (*n'importe quel)* in PR *n'importe quel changement*) :


LA DISTANZA NON VARIEREBBE PERCHE E
CIRCONFERENZE CONCENTRICHE LA DIFF
TRA I RAGGI DELLE 2 DI QUALSIASI CO
DI CIRCONFERENZE RIMAREBBE COSTAN
ES. $C_1 = 14$ cm $\quad r_1 = \frac{14}{2\pi} = 2,23$ cm
$C_2 = 24$ cm
$r_2 = \frac{24}{2\pi} = 3,82$ cm
$r_2 - r_1 = 3,82 - 2,23 = 1,59$ cm
$C_3 = 46$ cm $\quad r_3 = \frac{46}{2\pi} = 7,32$ cm
$C_4 = 56$ cm $\quad r_4 = \frac{56}{2\pi} = 8,91$ cm
$r_4 - r_3 = 8,91 - 7,32 = 1,59$ cm
I DUE RISULTATI SONO UGUALI
CVD

(Trad. *La distance ne varierait pas parce que pour des cercles concentriques la différence entre les rayons de n'importe quel changement de cercle resterait constante.)*

Dans quelques cas on relève des difficultés dans le calcul littéral ($2\pi r + 10 = ?$), dans d'autres une certaine habileté dans le choix d'exemples « subtils » avec des cercles dont les longueurs sont des multiples de 3,14 (PR). Les valeurs les plus fréquentes pour la longueur des cercles sont cependant des multiples de 10.


No la distanza tra le 2 circonferenze non cambierà mai.
Abbiamo provato a questa tesi facendo 2 esempi:
1) 1) C = 314 cm
D = 314 : π = 100 cm
R = 50 cm
2) C = 324 cm
D = 324 : π = 103,18 cm
R = 51,59 cm
DISTANZA = 1,59 cm
2) 1) C = 628 cm
D = 628 : π = 200 cm
R = 100 cm
C = 638 cm
2) 638 : 3,14 = 203,18
R = 101,59
Distanza = 1,59 c

(Trad. *Non, la distance entre les deux cercles ne changera jamais. Nous sommes arrivés à cette affirmation à partir de deux exemples. ...)*

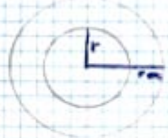
La copie suivante, de catégorie 9 (SI), est significative par l'usage des expressions littérales n et n+10 (avec, évidemment des nombres naturels), pour indiquer les mesures d'un couple de cercles concentriques et une conclusion sur la validité générale du résultat, à partir des deux seuls cas n = 45 et n = 78 pour lesquels on calcule les rayons des cercles et leur différence. On est certainement éloigné de l'idée correcte de

« généralisation », et on est même convaincu du contraire, en s'appuyant sur la phrase conclusive de la copie : *Nous avons démontré que la distance entre deux cercles différents de 10 cm, reste invariante, c'est-à-dire 1,6 cm ».*

Considerando le due circonferze (n e n+10), il ~~raggio tra~~ valore della distanza tra le due circonferenze rimane invariato, ovvero di 1,6 cm.
Qualsiasi valore venga attribuito ad "n", la distanza ~~rimane invariato~~ tra una circonferenza e quella rimanente, rimane invariata.

Esempio

n = 45



circonferenza n = 45 cm
circonferenza n+10 = 55 cm

$\frac{45}{2\pi} = 7,2$ $8,8 - 7,2 = 1,6$ cm

$\frac{55}{2\pi} = 8,8$

distanza tra le due circonferenze

circonferenza n = 78 cm
circonferenza n+10 = 88 cm

$\frac{78}{2\pi} = 12,4$ cm raggio circonferenza minore

$\frac{88}{2\pi} = 14$ cm raggio circonferenza maggiore

$14 - 12,4 = 1,6$ cm

Abbiamo dimostrato che la distanza tra due circonferenze differenti di 10 cm, rimane invariata, ovvero 1,6 cm.

(Trad. *Considérant les deux cercles (n et n+ 10) la valeur de la distance entre les deux cercles, reste invariante, c'est-à-dire 1,6 cm ». Pour n'importe quelle valeur qu'on attribue à n, la distance entre deux cercles ne varie pas. ...)*

La conviction de l'invariance de la distance en se limitant à la vérifier sur des cas particuliers subsiste aussi dans plusieurs copies de catégorie 10, comme le montrent le cas suivant (SI), dans lequel l'affirmation *La distance ne varie pas* est la conséquence d'une vérification pour deux valeurs du rayon.

La formula della circonferenza è $2\pi r$. Sostituiamo r con un valore qualsiasi, per esempio 5. Se r = 5 cm la circonferenza è 31,4 cm. La seconda misurerà 31,4 + 10 = 41,4 cm. Con la formula inversa, conoscendo la circonferenza, calcoliamo il raggio. $r = \frac{41,4}{2\pi} = 6,6$ cm. La distanza tra le circonferenze è $r_2 - r_1 = 6,6 - 5 = 1,6$ cm
Facciamo lo stesso procedimento con altri dati. Se $r_1 = 10$ cm la prima circonferenza misura 62,8 cm, la seconda è 72,8 cm e $r_2 = 11,6$ cm
Ancora una volta la distanza tra le circonferenze è $11,6 - 10 = 1,6$ cm.
La distanza non varia.

C) Construction d'un troisième exemple. Certaines fois, après avoir vérifié l'égalité des distances on propose un troisième exemple ou, plus fréquemment, on déclare en avoir fait d'autres (PR cat. 9), comme si on se rendait compte que deux exemples ne suffisent pas.

~~PRI~~ PER TROVARE IL RISULTATO ABBIAMO PROVATO A DISEGNARE ALTRE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE, LE CUI LUNGHEZZE DIFFERISCONO DI 10 cm, CALCOLANDO IL LORO RAGGIO.

ESEMPIO:

ABBIAMO SUPPOSTO CHE IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA PIU' PICCOLA MISURI 4 cm. IPOTIZZATA LA MISURA DEL RAGGIO ~~DELLA~~ CIRCONFERENZA PIU' PICCOLA ABBIAMO CALCOLATO TALE CIRCONFERENZA.

C_1 4 · 2π = 25,12 cm MISURA DELLA CIRCONFERENZA MINORE

CALCOLATA LA MISURA DELLA CIRCONFERENZA MINORE ABBIAMO AGGIUNTO A QUESTA 10 cm OTTENENDO COSI' LA LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA MAGGIORE.

C_2 25,12 + 10 = 35,12 cm LUNGHEZZA CIRCONFERENZA MAGGIORE

PER TROVARE IL RAGGIO ABBIAMO UTILIZZATO LA FORMULA INVERSA UTILIZZATA IN PRECEDENZA PER CALCOLARE LA CIRCONFERENZA MINORE.

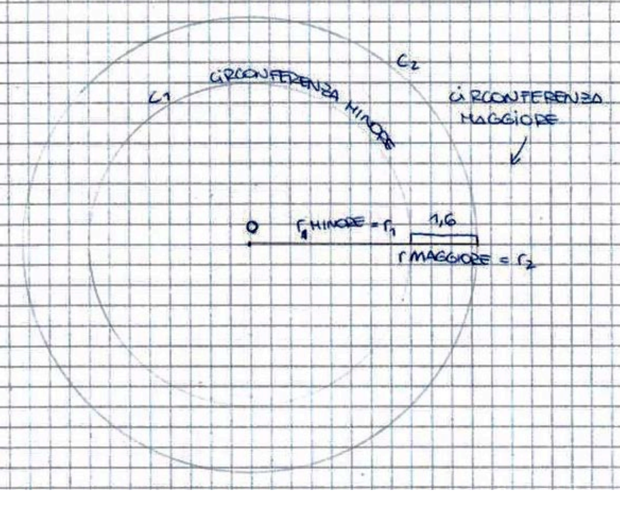
$r_2 = \frac{C_2}{2\pi} = \frac{35,12}{2\pi} = 5,59 \approx 5,6$ cm LUNGHEZZA DEL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA MAGGIORE

IN SEGUITO ABBIAMO CALCOLATO LA DIFFERENZA TRA I DUE RAGGI, CHE

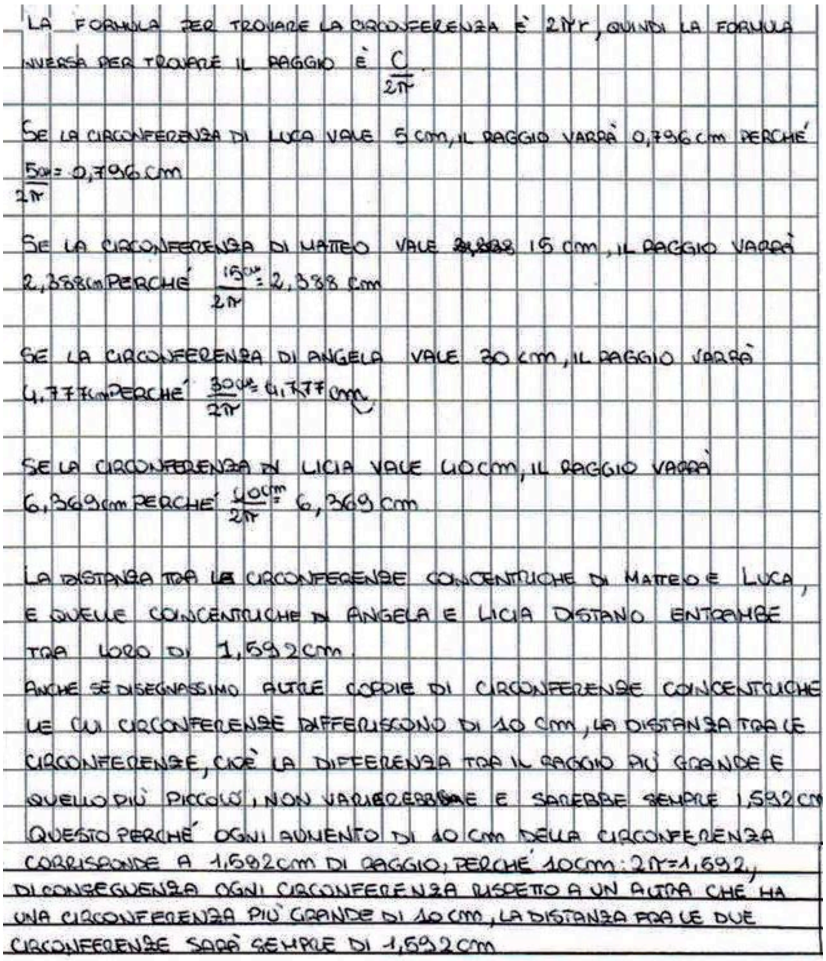
(Traduction résumée. *Pour trouver le résultat nous avons essayé de dessiner d'autres couples de cercles concentriques dont les longueurs diffèrent de 10 cm et avons calculé leur rayon. Exemple : Supposons que le rayon du petit cercle est 4 cm, sa longueur est 4•2π = 25,12, celle du grand cercle est 25,12 + 10 = 35,12 et avec la formule inverse : r_2= c_2/2π = 35.12/2π = 5,59 ≈ 5,6 cm). Ensuite nous avons calculé la différence entre les deux rayons en faisant d'autres exemples que celui-ci et c'est égal pour tous les couples de cercles concentriques dont l'un a 10 cm de plus : 5,6 – 4 = 1,6 cm.)*

FACENDO ALTRI ESEMPI COME QUESTO, E' UGUALE PER TUTTE LE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE, LA QUALE UNA E' PIU' LUNGA DELL'ALTRA DI 10 cm

5,6 − 4 = 1,6 cm



Dans quelques cas on considère une succession de couple de cercles concentriques (PR cat.9).



LA FORMULA PER TROVARE LA CIRCONFERENZA È $2\pi r$, QUINDI LA FORMULA INVERSA PER TROVARE IL RAGGIO È $\frac{C}{2\pi}$.

SE LA CIRCONFERENZA DI LUCA VALE 5 cm, IL RAGGIO VARRÀ 0,796 cm PERCHÉ $\frac{5cm}{2\pi} = 0,796$ cm

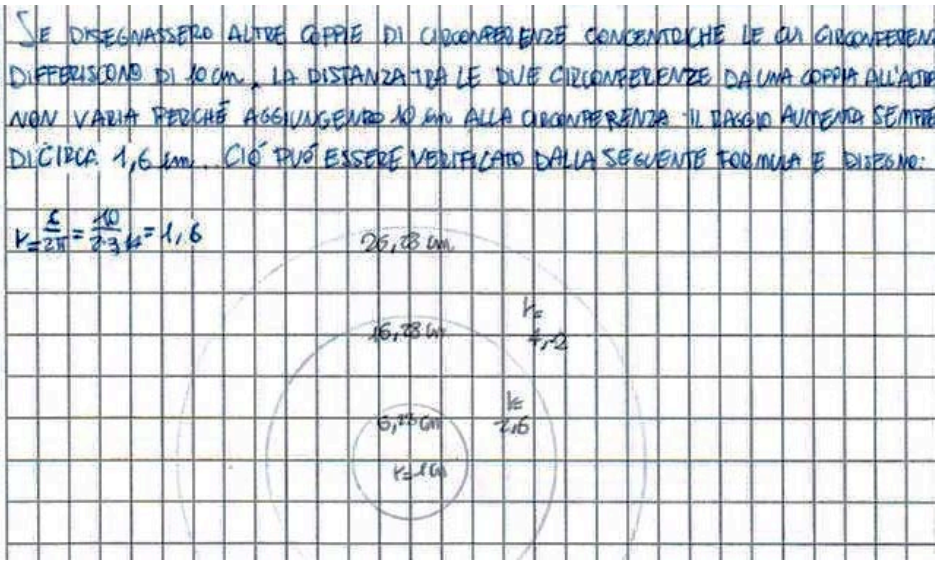
SE LA CIRCONFERENZA DI MATTEO VALE ~~2,388~~ 15 cm, IL RAGGIO VARRÀ 2,388cm PERCHÉ $\frac{15cm}{2\pi} = 2,388$ cm

SE LA CIRCONFERENZA DI ANGELA VALE 30 cm, IL RAGGIO VARRÀ 4,777cm PERCHÉ $\frac{30cm}{2\pi} = 4,777$ cm

SE LA CIRCONFERENZA DI LICIA VALE 40cm, IL RAGGIO VARRÀ 6,369cm PERCHÉ $\frac{40cm}{2\pi} = 6,369$ cm

LA DISTANZA TRA LE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE DI MATTEO E LUCA, E QUELLE CONCENTRICHE DI ANGELA E LICIA DISTANO ENTRAMBE TRA LORO DI 1,592 cm.
ANCHE SE DISEGNASSIMO ALTRE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE LE CUI CIRCONFERENZE DIFFERISCONO DI 10 cm, LA DISTANZA TRA LE CIRCONFERENZE, CIOÈ LA DIFFERENZA TRA IL RAGGIO PIÙ GRANDE E QUELLO PIÙ PICCOLO, NON VARIEREBBE E SAREBBE SEMPRE 1,592 cm QUESTO PERCHÉ OGNI AUMENTO DI 10 cm DELLA CIRCONFERENZA CORRISPONDE A 1,592cm DI RAGGIO, PERCHÉ $10cm : 2\pi = 1,592$, DI CONSEGUENZA OGNI CIRCONFERENZA RISPETTO A UN ALTRA CHE HA UNA CIRCONFERENZA PIÙ GRANDE DI 10 cm, LA DISTANZA FRA LE DUE CIRCONFERENZE SARÀ SEMPRE DI 1,592 cm

(Traduction résumée. *La formule pour trouver la circonférence est 2πr, donc la formule inverse pour trouver le rayons est c/2π* - suivie de quatre essais avec des longueurs de 5, 10, 30 et 40 - *La distance entre les cercles de Matteo et Luc et celle entre ceux de Angela et Lucia sont toutes les deux de 1,592 cm. - idem pour d'autres couples - La distance entre les rayons ne varierait pas et serait toujours 1,592 cm. Ceci parce que chaque augmentation de 10 cm du cercle correspond à 1,592 cm de rayon parce que 10 cm : 2π = 1,592. Par conséquent pour chaque cercle par rapport à un autre dont la longueur vaut 10 cm de plus donne une distance entre les deux cercles qui sera toujours 1,592 cm)*



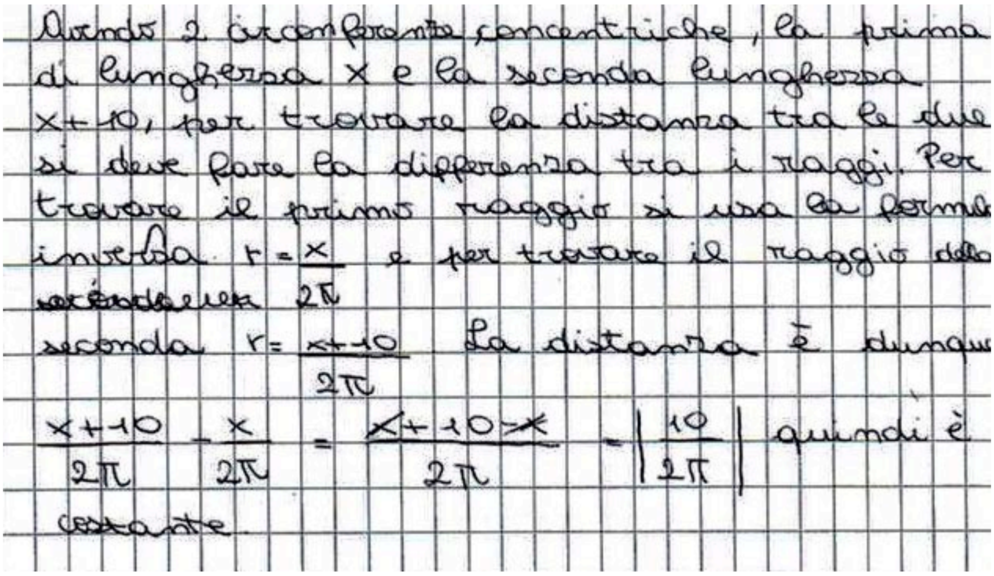
SE DISEGNASSERO ALTRE COPPIE DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE LE CUI CIRCONFEREN[ZE] DIFFERISCONO DI 10 cm, LA DISTANZA TRA LE DUE CIRCONFERENZE DA UNA COPPIA ALL'ALTRA NON VARIA PERCHÉ AGGIUNGENDO 10 cm ALLA CIRCONFERENZA IL RAGGIO AUMENTA SEMPRE DI CIRCA 1,6 cm. CIÒ PUÒ ESSERE VERIFICATO DALLA SEGUENTE FORMULA E DISEGNO:

$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10}{2 \cdot 3,14} = 1,6$

Très souvent le texte parle de plusieurs essais mais seuls quelques-uns sont reportés. Par exemple :
- dans une copie (SI 9), les élèves écrivent : *« Ouì, en faisant de nombreux essais avec les indications données du problème, nous sommes arrivés à conclure que la distance entre les deux cercles ne change pas. La distance*

selon nous est de 1,6 cm et nous avons vu que ça se répète en faisant des essais ». Suit un exemple numérique dans lequel le rayon du petit cercle est 7 cm et le calcul de la distance entre les deux cercles est correct, qui se termine par la phrase : *« Ce résultat s'est répété chaque fois que nous avons essayé de résoudre le problème ».*
- dans une autre (SI cat 9), on écrit *« Deux cercles concentriques dont l'un est 10 cm plus long que l'autre auront toujours la même distance de l'un à l'autre. Pour démontrer ce que nous affirmons nous avons fait des calculs pratiques ». Suivent trois* exemples avec r = 2, r = 5 et r = 1 et la conclusion : *« Nous avons inventé les longueurs des rayons et avons trouvé la même distance dans tous les cas ».* [et ceci semble être suffisant pour considérer que le résultat est vrai en général...]
Dans deux copies de cat. 9 (SI) qui ont suivi cette procédure une erreur dans l'interprétation de la condition a été observée : « deux cercles concentriques dont l'un est 10 cm plus long que l'autre » a conduit à déterminer la valeur 5 comme différence des rayons. L'erreur est due à l'incapacité d'écrire correctement l'augmentation de 10 cm du second cercle par rapport au premier [formellement de $C = 2\ r\ \pi$ pour le cercle initial, on est passé à $C_1 = (2r + 10)\ \pi$ (et non à $C_1 = 2r\pi + 10$) pour le grand cercle].

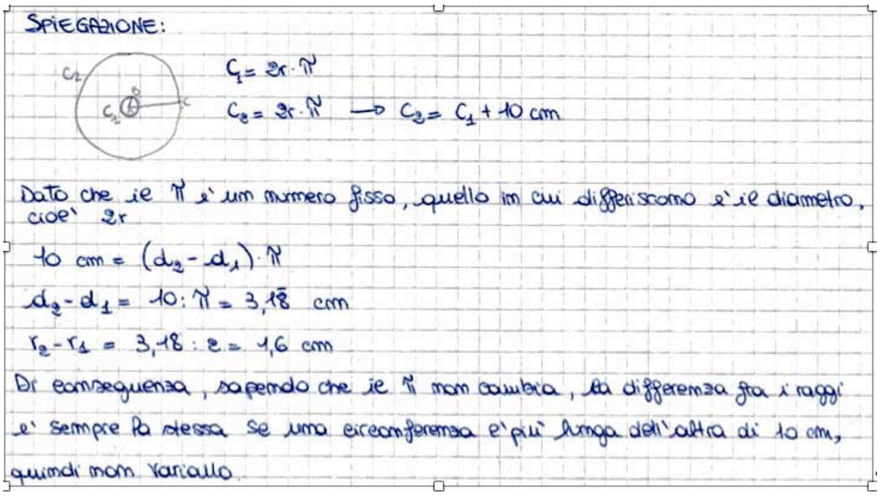
D) Dans de rares copies, mais significatives, on trouve une démonstration générale de la propriété, par l'introduction de symboles comme c_L, c_M pour les cercles de Luc et Matteo et relations de type $c_M = c_L+10$ ou l'indication des deux longueurs de cercles par x, x+10 utilisant le symbole le plus familier « x » pour la quantité variable. Dans ces cas il n'y a pas traces de calculs avec des exemples numériques (signe de la conviction que le raisonnement général ne nécessite pas de confirmations ultérieures) et la distance constante entre les différents couples de cercles est exprimée sous la forme symbolique 5/π ou 10/(2π) (PR 9006).


Avendo 2 circonferenze concentriche, la prima
di lunghezza x e la seconda lunghezza
x+10, per trovare la distanza tra le due
si deve fare la differenza tra i raggi. Per
trovare il primo raggio si usa la formula
inversa $r = \frac{x}{2\pi}$ e per trovare il raggio della
~~circonferenza~~
seconda $r = \frac{x+10}{2\pi}$ La distanza è dunqu
$\frac{x+10}{2\pi} - \frac{x}{2\pi} = \frac{\cancel{x}+10-\cancel{x}}{2\pi} = \left|\frac{10}{2\pi}\right|$ quindi è
costante

(Traduction résumée. *Ayant deux cercles concentriques, le premier de longueur x et le second de longueur x + 10, pour trouver la distance entre les deux il faut faire la différence entre les rayons. Pour trouver le premier on utilise la formule inverse r = x/2π, et pour le second r = (x + 10)/2π …*)

Dans un cas, deux variables sont présentes : x pour le cercle de Luc et y pour celui de Matteo et une équation est posée, qui reste indéterminée.

A Sienne, on a trouvé dans les copies deux façons de procéder : la première part de la différence de 10 cm entre les mesures des deux cercles et passe, par la formule, à l'expression de la différence entre les rayons puis à la vérification qu'elle est constante ; la seconde utilise la formule pour obtenir, tant pour le petit cercle que pour le grand valant 10 cm de plus, l'expression des deux rayons, puis constater que la différence ne varie pas.
La copie qui suit est un exemple de la première façon de procéder (SI cst.9) où l'on note la présence d'une écriture formelle, non entièrement correcte, dans laquelle apparaissent ensemble les mesures et les longueurs.



SPIEGAZIONE:

$C_1 = 2r \cdot \pi$

$C_2 = 2r \cdot \pi \longrightarrow C_2 = C_1 + 10$ cm

Dato che il π è un numero fisso, quello in cui differiscono è il diametro, cioè 2r

$10 \text{ cm} = (d_2 - d_1) \cdot \pi$

$d_2 - d_1 = 10 : \pi = 3{,}1\overline{8}$ cm

$r_2 - r_1 = 3{,}18 : 2 = 1{,}6$ cm

Di conseguenza, sapendo che il π non cambia, la differenza fra i raggi è sempre la stessa se una circonferenza è più lunga dell'altra di 10 cm, quindi non variano

(Traduction résumée. … *Etant donné que π est un nombre fixé ce qui les différencie est le diamètre, c'est-à-dire 2r ...Par conséquent, sachant que π ne change pas, la différence entre les rayons est toujours la même si un des cercles vaut 10 cm de plus que l'autre, donc elle ne change pas.)*

Dans une copie de Sienne de catégorie 10, on arrive à la conclusion correcte, par un raisonnement « par l'absurde » :
Si la distance entre les deux cercles variait selon leur longueur on arriverait à une situation où les deux cercles coïncideraient, donc la distance ne diminue pas. Par conséquent la distance entre les deux cercles ne varie pas selon leur longueur".

On pourrait penser que les élèves ont exclu qu'à une augmentation du cercle « plus petit » la distance du cercle concentrique de 10 cm de plus ne puisse pas augmenter, mais plutôt diminuer. Mais si cela était vrai, le rayon de la circonférence de départ aurait une « valeur limite » au-delà de laquelle on ne pourrait pas construire une circonférence concentrique de 10 cm de plus, ce qui serait manifestement absurde.

Activité en classe avec les deux problèmes

Comme nous l'avons dit dans le paragraphe « Indications didactiques », les deux problèmes, objet de cet approfondissement, se prêtent bien à une activité de classe.
Le problème des quatre circonférences, proposé dans une classe de troisième année de lycée scientifique (hypothétique catégorie 11) par Angela Rizza, en travail en groupe, a produit plus ou moins les mêmes procédures de résolution que les précédentes. Une discussion entre les groupes a cependant permis d'éclairer la différence profonde entre la validité d'un résultat obtenu au travers d'un certain nombre, même élevé, d'exemples et de la validité généralisée par le recours au calcul littéral.
Il s'agit d'un saut cognitif important, que des problèmes choisis opportunément pourraient stimuler aux différents degrés scolaires, pour dépasser l'énoncé de propriétés basées sur des exemples uniquement.

Le problème des deux cercles a aussi été proposé dans une classe (deuxième année de lycée scientifique de Silvano Gregori), individuellement cette fois-ci, avec 16 étudiants dont aucun n'a recouru à des exemples numériques, attribuant aux rayons une mesure spécifique.
Les copies sont présentées ici selon sept types de réponses.

Type A (5 étudiants) :
Les étudiants indiquent par une lettre (C ou x) la longueur du petit cercle et par $C + 10$ (ou $x + 10$) celle du grand cercle, déterminant donc les longueurs de chacun des deux rayons, en divisant par 2π:

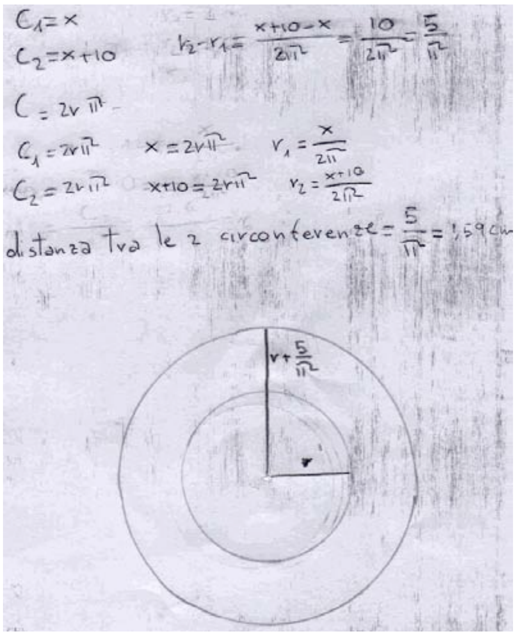
$$r_1 = \frac{C}{2\pi}$$

$$r_2 = \frac{C+10}{2\pi}$$

De la différence entre les expressions des deux rayons, ils trouvent la distance entre les cercles :

$$r_2 - r_1 = \frac{C+10}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{C+10-C}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ cm}$$

Variante (qui ne semble pas très significative) : certains trouvent tout d'abord les diamètres en divisant les longueurs des cercles par π; puis la divisent par 2 pour trouver la distance entre les cercles et continuer par le calcul approximatif de la distance : 1,59 cm et 1,6 cm ; l'un se contente de l'expression symbolique 5/π.



Type B (2 étudiants)

Les étudiants notent par x le rayon du petit cercle et écrivent les longueurs des deux cercles:

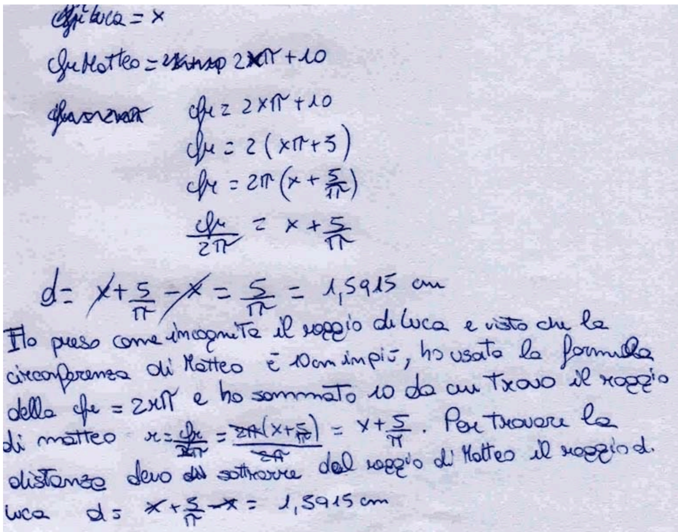
$$C_L = 2\pi x$$

$$C_M = 2\pi x + 10$$

Puis ils trouvent le rayon de C_M: $\dfrac{C_M}{2\pi} = x + \dfrac{5}{\pi}$

Et enfin la distance entre les deux cercles: $d = x + \dfrac{5}{\pi} - x = \dfrac{5}{\pi}$

Calcul approximatif de la distance : 1,59 cm (1 étudiant) et 1,5915 cm (1 étudiant)



Type C (3 étudiants)

Les deux rayons sont notés r et R, ils écrivent les mesures des deux cercles: $C_1 = 2\pi r$ et $C_2 = 2\pi R$.

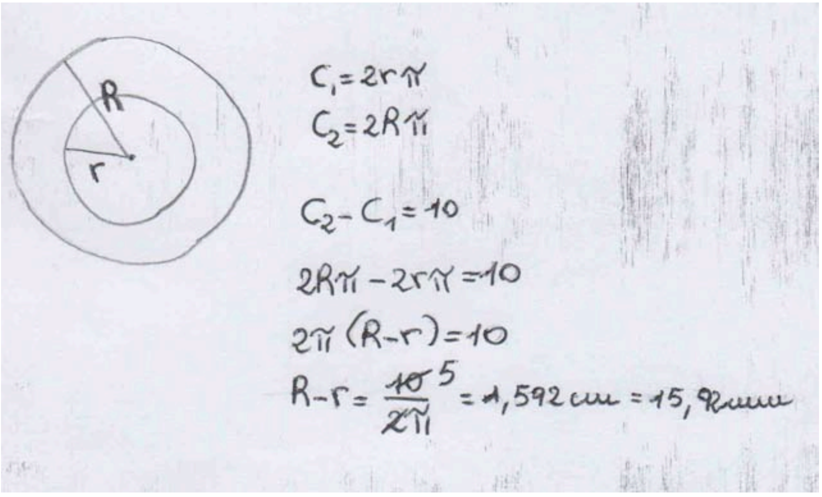
Alors, étant donné que $C_2 - C_1 = 10$:

$$2\pi R - 2\pi r = 10$$

$$2\pi\left(R - r\right) = 10$$

$$R - r = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$$

Calcul approximatif de la distance : 1,592 cm (2 étudiants), 15,9 mm (1 étudiant)



Type D (3 étudiants)

La distance entre les deux cercles est notée *x* et le petit rayon *r* (ou *y*), ils déterminent :

$$C = 2\pi r$$

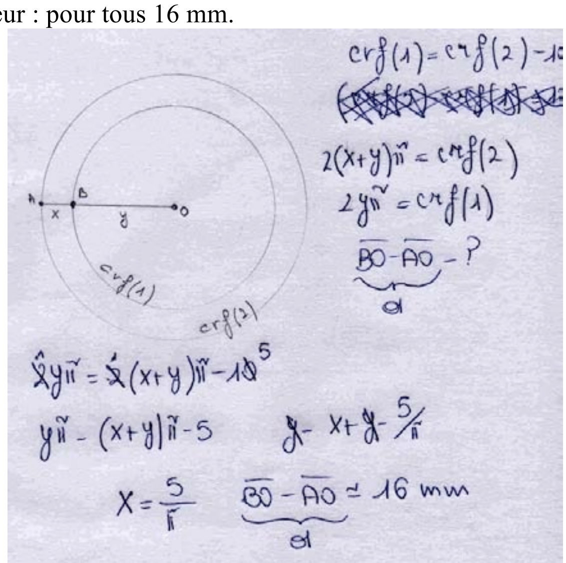
$$C' = 2\pi\left(r + x\right)$$

Puis ils traduisent en équation l'information que le second cercle vaut 10 cm de plus que le premier :

$$2\pi r + 10 = 2\pi\left(r + x\right)$$

De la résolution de l'équation ils trouvent $x = \dfrac{5}{\pi}$

Calcul approximatif de la valeur : pour tous 16 mm.

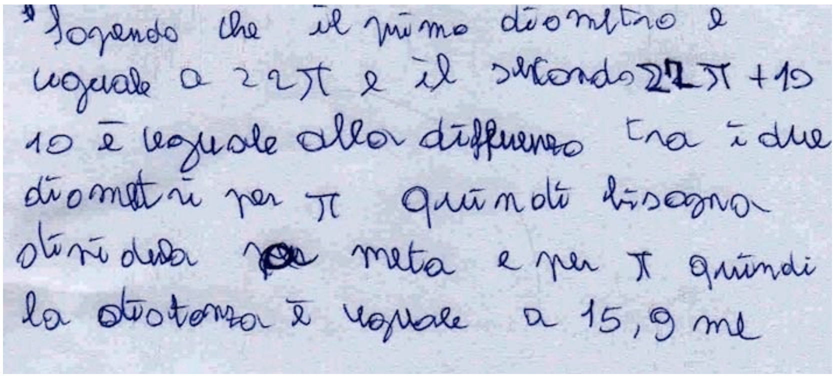


Type E (1 étudiant)

En langage exclusivement verbal (imprécis, parce qu'au début, le terme diamètre désigne le cercle), il cherche (péniblement, tant du point de vue orthographique que syntaxique, ou lexical) d'expliquer ce qu'il a trouvé par des formules écrites en brouillon et non reportées sur la feuille. Il raisonne par formules, mais préfère reporter la réponse de manière rhétorique :

- premièrement il déclare que les deux cercles (mais écrit « diamètres ») mesurent 22π et 22π + 10
- par conséquent 10 est la différence entre les deux diamètres, multipliée par π (on comprend qu'il traduit par des mots 10 = π(2R – 2r), mais qui n'équivaut pas au choix initial sur l'usage de *r*),
- il faut alors diviser cette différence (10) par π et par 2, pour trouver la distance entre les cercles (cohérente avec la seconda formalisation)

Calcul de la valeur approximative : 15,9 mm.

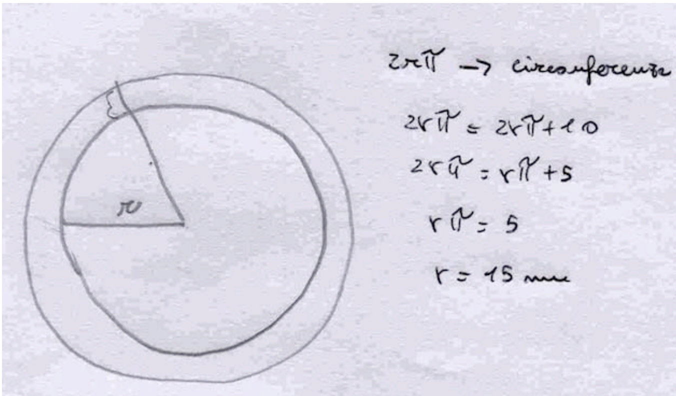


Type F (1 étudiant)

Il introduit de manière erronée la relation entre les longueurs des deux cercles: $2r\pi = 2r\pi + 10$, en attribuant la même longueur du rayon *r*. Suivent des erreurs algébriques dans la résolution de l'équation pour aboutir à un rayon *r* = 15 On ne comprend pas si l'étudiant pense avoir trouvé la distance entre les deux cercles ou s'il s'agit du rayon.

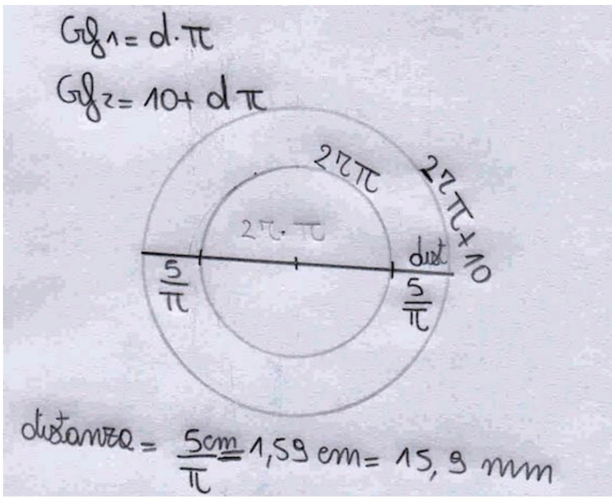
Evidemment, on ne sait pas à quel rayon il se réfère, vu qu'il les a désignés les deux par *r*.

C'est cependant une occasion intéressante de stimuler la discussion en classe sur les implications d'une telle ambiguïté.



Type G (1 étudiant)

Il écrit sur la figure les longueurs des cercles 2π r et 2π r+10. Et à côté, que $C_1 = d\pi$ et $C_2 = 10 + d\pi$ (toujours sur la figure), que les deux distances entre les cercles (sur le même diamètre) sont $\frac{5}{\pi}$. Mais il n'y a pas d'explication, ni par des calculs ni verbalement. Calcul approximatif de la distance : 15,9 cm.



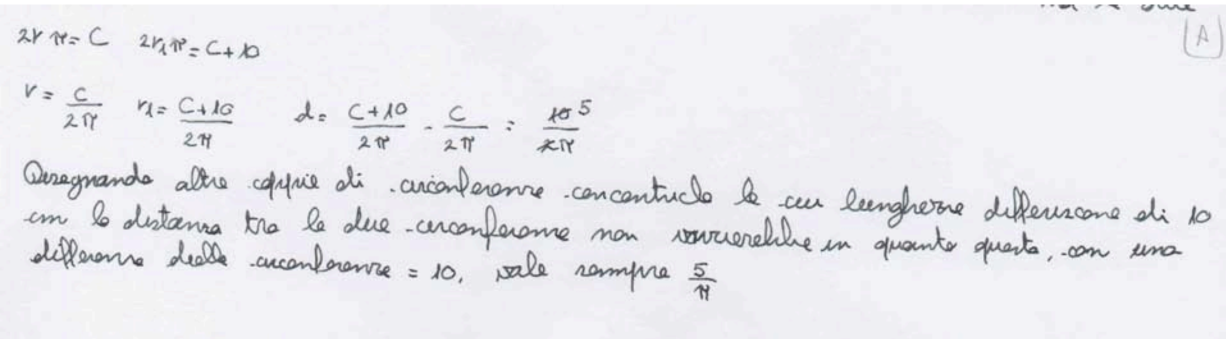
Le problème des quatre cercles a été proposé à la même classe après une longue période.

Problème des quatre cercles : analyse des copies et discussion avec la classe, par Silvano Gregori

Le problème est soumis à 17 étudiants, dont 15 avaient déjà travaillé sur le problème des deux cercles et 2 absents à cette occasion.
Les deux points essentiels de la démonstration demandée consistent :

1) en la prise de conscience que pour aborder le problème **de manière générale** il est nécessaire d'attribuer aux cercles ou aux rayons des mesures non spécifiques, mais exprimées littéralement ;
2) en la reconnaissance que l'élimination de termes littéraux (qui peuvent être les mesures de longueur des rayons ou des cercles) entérine l'indépendance de la distance entre les cercles des mesures de leurs longueurs ou de celles des rayons.

Réponse de type A' (7 étudiants) :
Les étudiants procèdent en ajoutant des arguments déjà utilisés dans les réponses de type A ou D du problème des deux cercles.



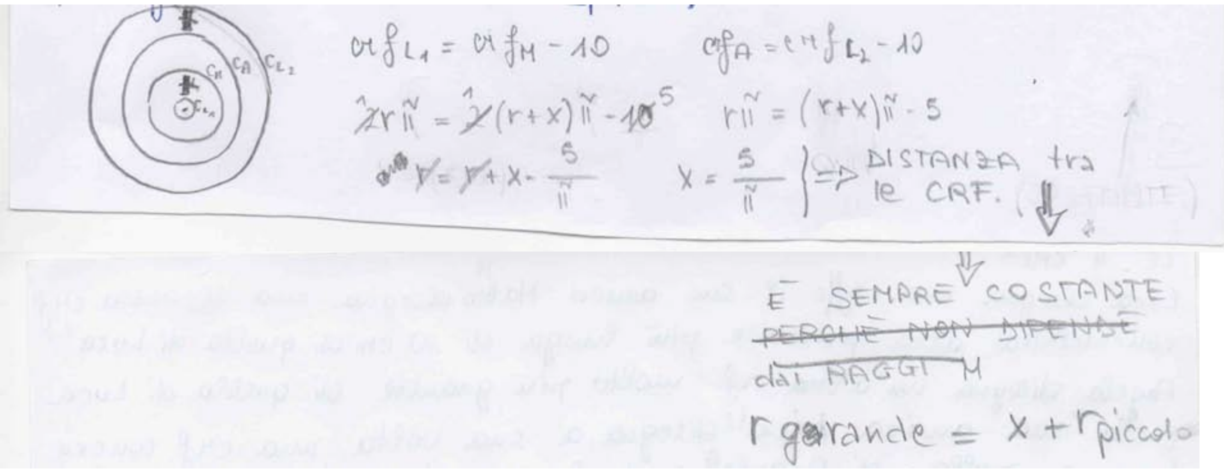
(A)

$2r\pi = C \quad 2r_1\pi = C+10$

$r = \frac{C}{2\pi} \quad r_1 = \frac{C+10}{2\pi} \quad d = \frac{C+10}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{10}{2\pi}$ 5

Disegnando altre coppie di circonferenze concentriche le cui lunghezze differiscono di 10 cm la distanza tra le due circonferenze non varierebbe in quanto questa, con una differenza delle circonferenze = 10, vale sempre $\frac{5}{\pi}$

(Traduction résumée. … = 5/π. *En dessinant d'autres couples de cercles concentriques dont les longueurs diffèrent de 10 cm, la distance entre les deux cercles ne changerait pas vu qu'avec une différence = 10, elle vaut toujours 5/π.*)



circ L_1 = circ M − 10 circ A = circ L_2 − 10

$2r\pi = 2(r+x)\pi - 10 \quad r\pi = (r+x)\pi - 5$

$r = r + x - \frac{5}{\pi} \quad x = \frac{5}{\pi}$ ⇒ DISTANZA tra le CRF.

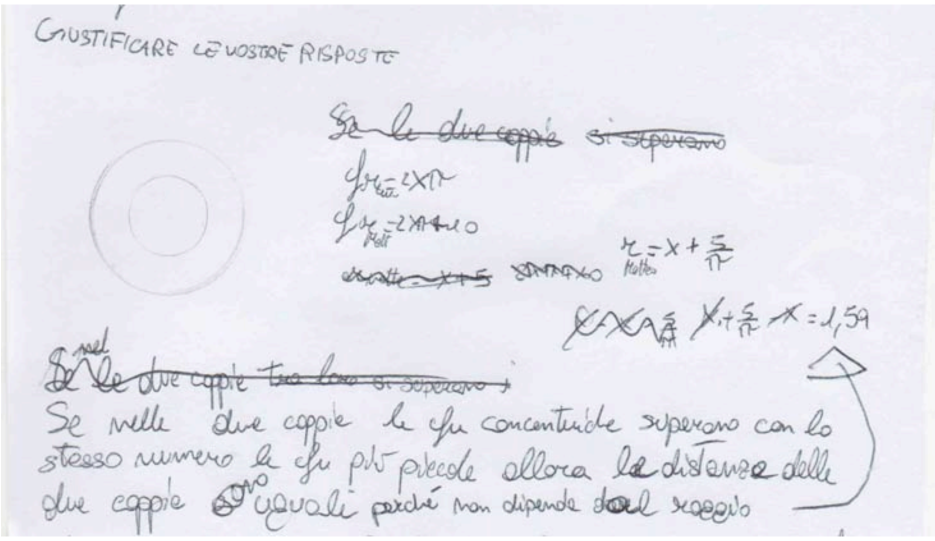
È SEMPRE COSTANTE ~~PERCHÉ NON DIPENDE~~ dai RAGGI M

r garande = x + r piccolo

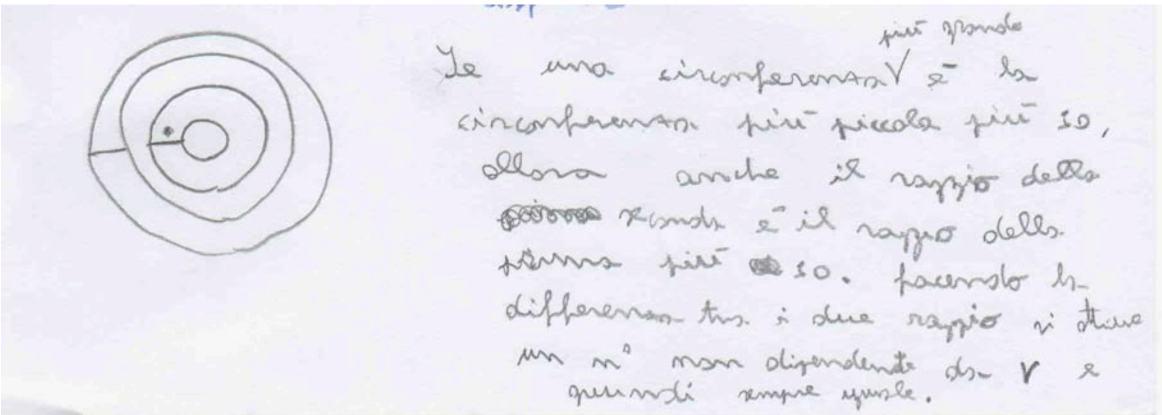
(Traduction résumée *: La distance entre les cercles est toujours constante, r grand = x + r petit.*)

Ils semblent conscients que l'usage des lettres *C* ou *r* permet une résolution générale du problème, qui considère tous les couples de cercles possible, mais ils ne l'affirment pas explicitement, se contentant de dire à la fin « *la distance entre les deux cercles… vaut* ***toujours*** 5/π ».
Il n'y a aucune référence explicite à l'élimination de *r* ou de *C* (le passage de l'élimination de *C*, est souvent omis, pour passer directement au résultat de la distance) ou à l'absence des lettres *r* et *C* dans le résultat final.

Réponse de type B' (2 étudiants) :
Ces étudiants sont capables de reconnaître et d'exprimer verbalement le fait de l'élimination de *x* (rayon du petit cercle) en disant que « *la distance des deux couples … ne dépend pas du rayon* ».

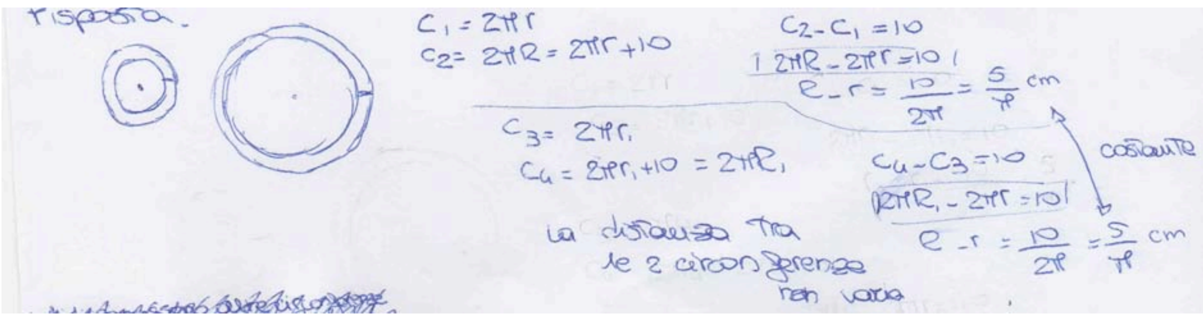


Aucune référence explicite ne concerne cependant le fait que l'usage des lettres permet de considérer de manière générale tous les couples possibles de cercles.
Le second étudiant ne répond pas correctement, en notant que la différence de 10 cm entre les cercles peut aussi être attribuée aux rayons. Mais l'idée est claire que « *en faisant la différence entre les deux rayons on obtient un nombre indépendant de r et donc toujours égal ».*



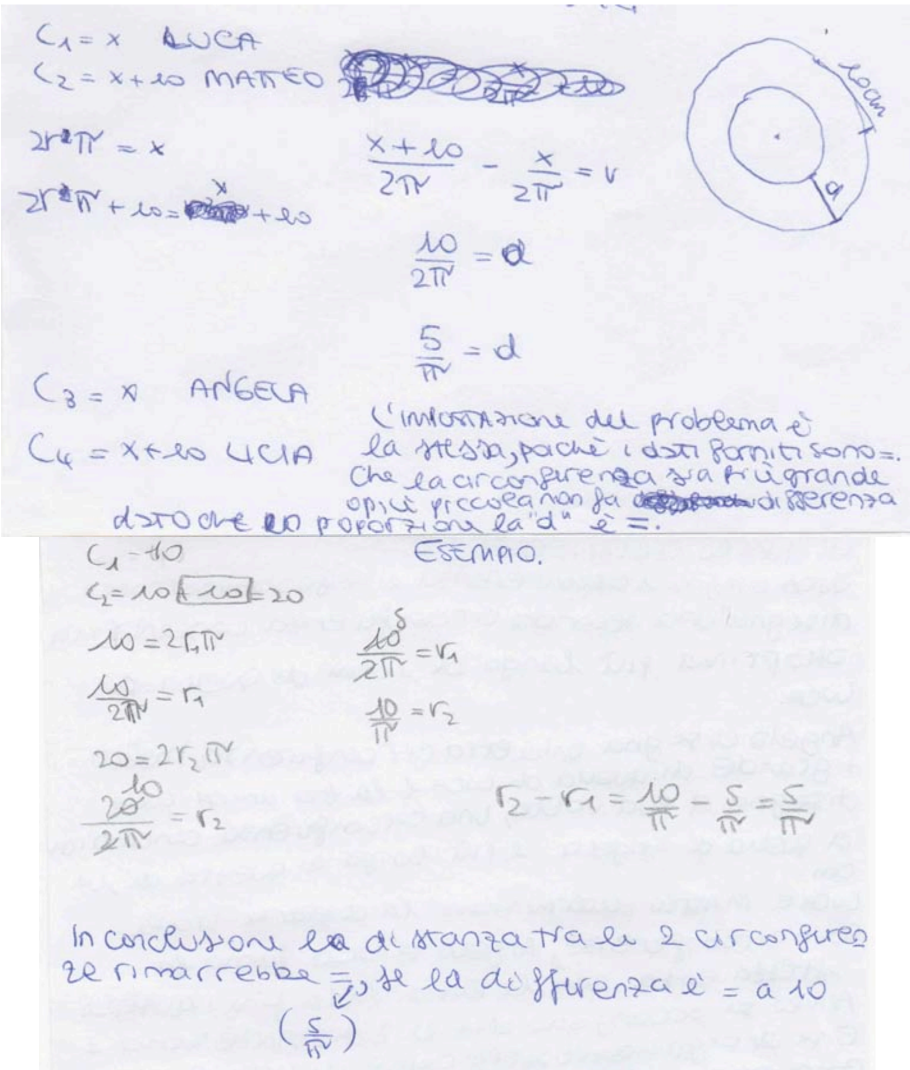
(Traduction : *Si un cercle est plus grand de 10 cm que le petit, alors le rayon du grand est le rayon du petit plus 10. en faisant la différence entre les deux rayons on trouve un nombre qui ne dépend pas de r et donc toujours égal.)*

Réponse de type C' (3 étudiants)
Ils utilisent le calcul littéral, sans exploiter pleinement sa généralisation : ils répètent en fait deux fois le calcul de la distance entre les cercles, avec des lettres différentes, pour arriver dans les deux cas à la même valeur de la distance et pour conclure que « *la distance entre les deux cercles ne varie pas ».* Il manque une extension explicite du résultat à tous les couples possibles de cercles.



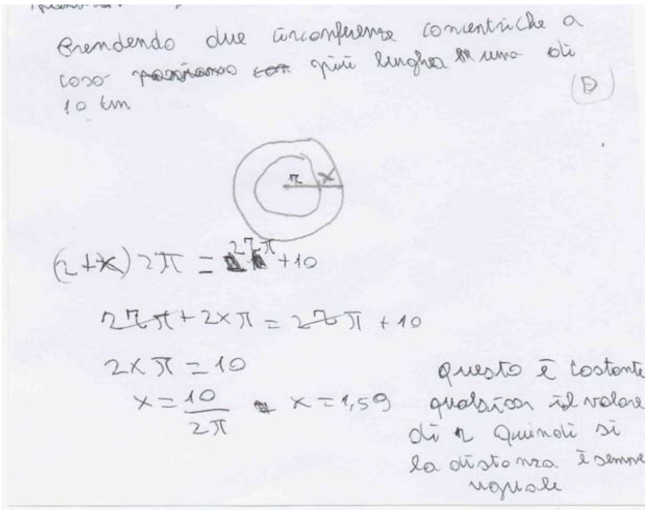
Le cas d'une étudiante qui, après avoir indiqué par x la longueur du cercle de Luc et par $x + 10$ celle du cercle de Mateo, est particulièrement intéressant : elle détermine, avec quelques confusions des variables r et d, la distance

$d = 5/\pi$. Elle commence alors un discours analogue pour les cercles d'Angela et Licia, mais elle s'arrête après avoir écrit $C_3 = x$ et $C_4 = x + 10$, en observant que « *la pose du problème est la même puisque les données sont égales »* et « *Que le cercle soit plus grand ou plus petit ne change pas vu qu'en proportion le « d » est égal.* La même étudiante estime cependant que la démonstration est plus convaincante si elle est accompagnée d'un exemple numérique, dans lequel elle attribue à C_1 la mesure de 10 cm. Cette nécessité d'un exemple numérique montre bien que la démonstration au niveau littéral ne la convainc pas pleinement.


$C_1 = x$ LUCA
$C_2 = x + 10$ MATTEO
$2r^2\pi = x$
$2r^2\pi + 10 = x + 10$
$\frac{x+10}{2\pi} - \frac{x}{2\pi} = r$
$\frac{10}{2\pi} = d$
$\frac{5}{\pi} = d$
10cm
d
$C_3 = x$ ANGELA
$C_4 = x + 10$ LICIA
L'impostazione del problema è la stessa, perchè i dati forniti sono =. Che la circonferenza sia più grande o più piccola non fa differenza dato che in proporzione la "d" è =.
ESEMPIO.
$C_1 = 10$
$C_2 = 10 + \boxed{10} = 20$
$10 = 2r_1\pi$
$\frac{10}{2\pi} = r_1$
$\frac{10}{2\pi} = r_1$ (5)
$20 = 2r_2\pi$
$\frac{20}{2\pi} = r_2$ (10)
$\frac{10}{\pi} = r_2$
$r_2 - r_1 = \frac{10}{\pi} - \frac{5}{\pi} = \frac{5}{\pi}$
In conclusione la distanza tra le 2 circonferenze rimarrebbe =, se la differenza è = a 10 $\left(\frac{5}{\pi}\right)$

Réponse de type D' (4 étudiants)

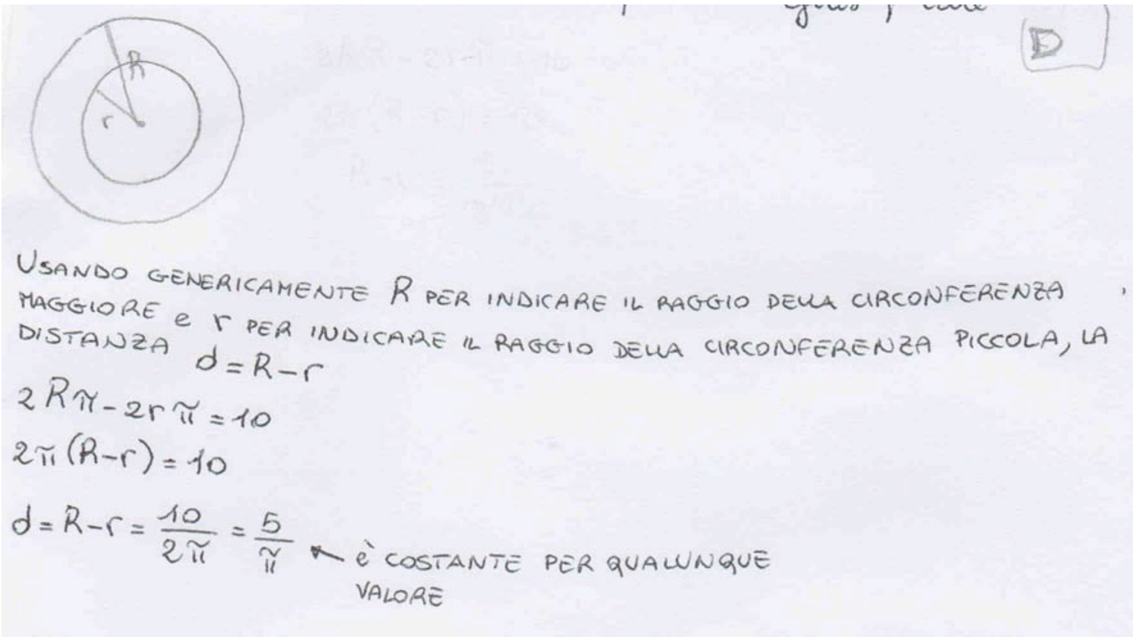
De manière plus ou moins orthodoxe, la généralité de la résolution obtenue par des termes littéraux est reconnue :

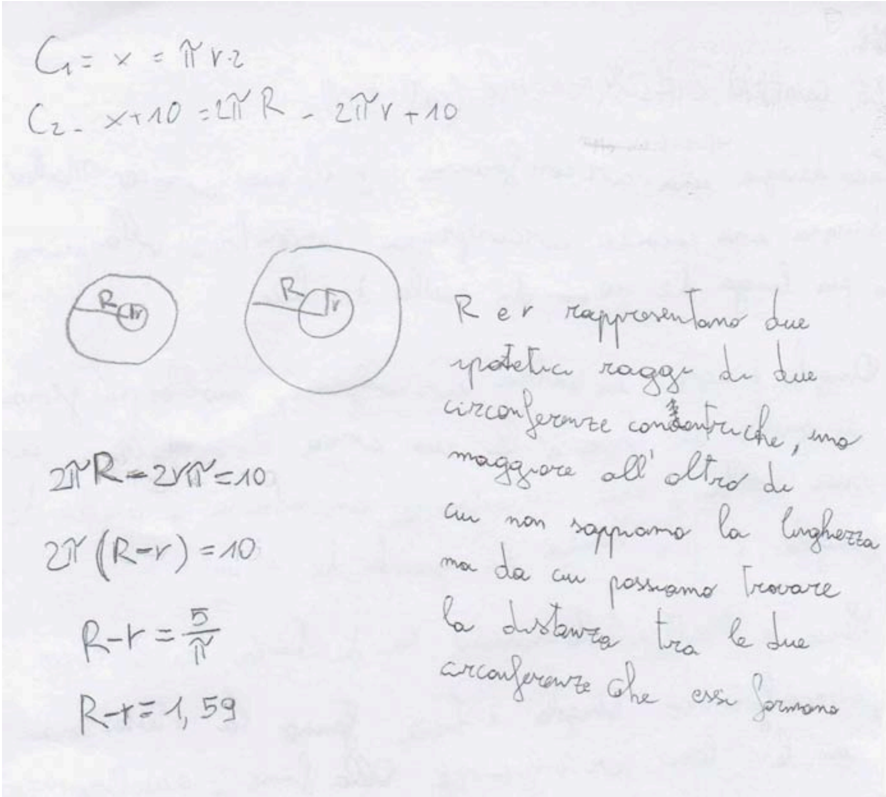


La phrase « *En prenant* ***au hasard*** *deux cercles concentriques …* » qui précède la formalisation $(r + x)2\pi = 2r\pi + 10$ montre que cet étudiant a conscience de la généralité de sa résolution.

En outre, du commentaire final « *Ceci est constant quel que soit la valeur de r* » il est clair que l'étudiant reconnaît, dans l'absence de *r* de l'expression de la distance, l'indépendance de *d* et de *r*; ce qui lui permet de conclure que « *Par conséquent la distance est toujours égale.* »

Les mêmes prises de conscience sont évidentes de manière explicite dans ces autres réponses :





Dans cette dernière copie, il est aussi clair que l'usage de lettres permet de considérer deux cercles arbitraires, même si le lexique utilisé (« *R et r représentent deux rayons* ***hypothétiques*** *… dont nous ne connaissons pas la longueur »*) ce n'est pas l'usage « officiel » et le plus approprié.

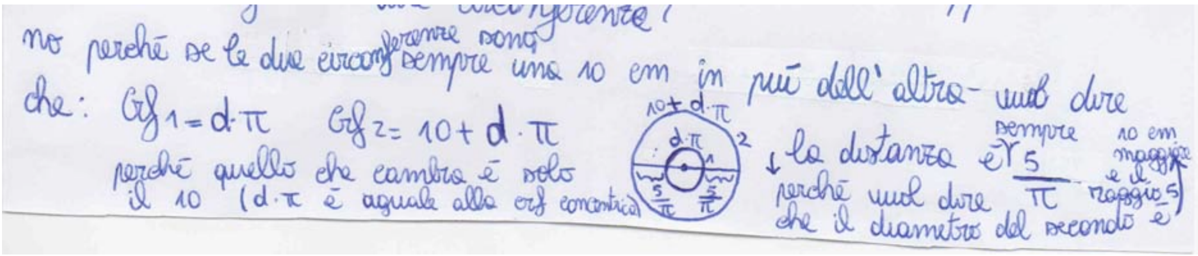
Réponse de type E' (1 étudiant)

L'étudiant est celui de la réponse de type G du problème des deux cercles. Dans ce cas, il accompagne la figure identique à celle du problème précédent, d'une tentative d'explication :

$Crf_1 = d\pi$

$Crf_2 = 10 + d\pi$, parce que ce qui change est seulement le 10 ($d\pi$ est égal au cercle concentrique)

La distance est toujours $5/\pi$ parce que cela veut dire que le diamètre du second vaut 10 de plus et le rayon est 5.



L'explication est évidemment incorrecte formellement et dénote une évidente incapacité de contrôle morphosyntaxique du discours, alors que l'on demande une argumentation de type logico-mathématique.

L'étudiant ne recours pas aux opérations numériques ni au calcul littéral mais arrive à une conclusion juste ; même s'il ne réussit pas à expliquer correctement son raisonnement dans sa copie. Son argumentation personnelle sera mieux explicitée lors de la discussion en classe qui interviendra juste après la phase de résolution.

Discussion en classe

Lors de la restitution des feuilles avec les réponses, encore avant que je propose à la classe un débat sur le problème à peine résolu, une étudiante (du groupe A') m'a dit qu'il lui semblait absolument nécessaire de discuter sur la manière de donner la réponse à ce problème. Occasion cueillie au vol.

À la question « Avez-vous trouvé ce problème difficile'? » il est apparu clairement combien il était différent de celui des deux cercles : dans ce premier problème il n'y avait, globalement, qu'un seul nombre demandé (comme habituellement dans la pratique scolaire). Ici par contre il fallait donner une explication convaincante du fait que la distance entre les deux cercles est toujours la même pour chaque de cercles, dans un contexte non standard de géométrie. Le doute des étudiants réside dans le fait qu'une explication donnée au moyen de formules puisse être

une vraie « explication ». Faut-il une médiation verbale ou est-il suffisant d'écrire en mode symbolique ? Ma réponse a été plus ou moins celle-ci : le langage symbolique permet de traduire de manière exacte et complète une affirmation exprimée par des mots, avec l'avantage d'une expression synthétique qui offre une vision d'ensemble que le langage verbal ne permet pas toujours et qui favorise la mobilité de pensée. Cette mobilité est souvent renforcée par la possibilité de manipuler « mécaniquement » les formules, par de brefs passages, qui seraient difficiles et laborieux d'exprimer verbalement. D'un autre point de vue, la traduction symbolique, dans sa synthèse extrême, risque de ne pas donner le juste relief à certains aspects : pour ceci, quelques passages de la démonstration conduite en langage algébrique doivent être accompagnés de commentaires exprimés verbalement.
Pour mieux faire comprendre ce que j'entendais, j'ai demandé à un étudiant d'écrire sa réponse au tableau noir. J'ai choisi délibérément un étudiant du groupe de réponses C'.
J'ai demandé aux autres étudiants s'ils estimaient nécessaire de répéter le calcul de la distance pour les cercles d'Angela et Licia. La réponse, un peu désordonnée mais assez unanime et convaincue, a été que, par l'usage des lettres non liées à un cercle particulier, la première démonstration est déjà suffisante, pour le second couple de cercles et même pour toutes les couples possibles. J'ai donc observé que cet aspect méritait d'être explicitement exprimé dans leurs réponses.
Lors du déroulement des calculs pour la détermination de la distance, l'étudiant a éliminé les deux termes correspondant à la mesure du petit cercle. J'ai demandé ce que signifiait le fait que ces deux termes « disparaissent ». L'étudiant n'a pas hésité à répondre que la valeur de *d* est indépendante de la variable qui a été éliminée. J'ai ajouté que ceci méritait d'être clairement écrit et commenté lors du passage à une écriture algébrique.
J'ai ensuite appelé l'étudiante qui a ajouté l'exemple numérique après la démonstration littérale (pendant qu'elle répondait sur la feuille, elle m'avait demandé s'il était mieux de donner un exemple numérique et je lui avais répondu qu'elle devait choisir la réponse exhaustive la plus idoine) : lorsqu'elle a expliqué qu'elle avait adjoint un exemple numérique, j'ai demandé si tous étaient d'accord sur le fait qui ceci pouvait rendre la démonstration plus « forte ». Quelques étudiants ont observé qu'en faisant ainsi on revenait à un cas particulier, en s'éloignant de la demande générale du problème.
J'ai ensuite demandé à l'étudiante qui m'avait dit qu'il lui semblait absolument nécessaire de discuter sur la manière de donner la réponse à ce problème quelles étaient ses doutes sur sa manière de répondre (Second exemple de copie de type A' reporté ci-dessus). Elle avait noté l'indépendance de la distance *d* des rayons (conséquence de l'élimination de *r*). Elle avait écrit, puis biffé cette observation. Il lui semblait qu'il y avait une contradiction entre l'indépendance finale de *r* et la dépendance initiale des longueurs des deux cercles de *r*. Je lui ai fait observer que la contradiction entre dépendance / indépendance de *r* n'était qu'apparente : les sujets étant différents. Les longueurs des cercles sont dépendantes de *r*. La distance entre les deux cercles, en revanche, est indépendante de *r*. Une distinction claire des sujets permet de résoudre la « contradiction ».
Enfin j'ai demandé à l'étudiant qui a donné la réponse de type E' de mieux expliquer comment il est arrivé à $d = 5/\pi$. J'ai compris ceci (ce qui suit est ma tentative de mieux traduire ce que l'étudiant avait de la peine a verbaliser clairement et il m'a confirmé que c'était ce qu'il voulait dire) : Si, pour passer du diamètre au cercle il faut multiplier par π. pour revenir en arrière il suffit de diviser par π. Comme la différence entre les deux cercles est 10, alors la différence entre les deux diamètres est $10/\pi$; et entre les rayons il y a une différence de $5/\pi$. L'étudiant exploite, inconsciemment, la linéarité de l'application qui fait passer de la mesure du diamètre à celle du cercle correspondant.
Si l'on veut formaliser :
$f : d \mapsto C$ est la bijection qui associe à chaque diamètre la longueur du cercle correspondant :

$$f\left(d\right) = d \cdot \pi$$

avec les propriétés des application linéaires : $f\left(x_1 \pm x_2\right) = \left(x_1 \pm x_2\right) \cdot \pi = x_1\pi \pm x_2\pi = f\left(x_1\right) \pm f\left(x_2\right)$
Pour la fonction inverse :

$f^{-1} : C \mapsto d$,

avec $f^{-1}\left(C\right) = \dfrac{d}{\pi}$

et les mêmes propriétés $f^{-1}\left(x_1 - x_2\right) = f^{-1}\left(x_1\right) - f^{-1}\left(x_2\right)$.
Donc la différence entre les deux diamètres est :

$$d_1 - d_2 = f^{-1}(C_1) - f^{-1}(C_2) = f^{-1}(C_1 - C_2) = f^{-1}(10) = \frac{10}{\pi}$$

L'idée me semble correcte et raffinée, mais difficile à exprimer sans un formalisme et un langage spécifique adéquats.

Quelques suggestions de nature didactique

- Utiliser l'algèbre non seulement comme un simple moyen de calcul, mais aussi et surtout comme un langage pour penser de manière plus aisée et pour montrer propriété (avec cette classe, Silvano Gregori a beaucoup travaillé au cours de l'année précédente sur de simples démonstrations du genre « la somme de deux nombres pairs est un nombre pair », « la somme de deux nombres impairs est un nombre pair », « le carré d'un nombre pair est divisible pour 4 », « la somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3 », etc.). Il pourrait être utile de confronter une démonstration en langage symbolique ou une résolution d'une équation avec la démonstration analogue purement verbale. (A ce propos on pourrait utiliser quelques « raisons » tirées des livres d'abaque, qui mettent en relief l'économie et l'aisance du calcul et de la pensée offertes par l'algèbre symbolique par rapport à l'algèbre exclusivement rhétorique.)
- Consolider l'habitude de lire de quelle variable dépend une autre variable, mais aussi de quelle variable elle est indépendante. Ceci peut être fait en physique aussi. Les occasions sont nombreuses où il est plus important de remarquer ce qui manque dans une formule, plutôt que ce qui y est présent. Par exemple l'indépendance de la période du pendule simple de la masse du pendule peut être lue dans la formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ en notant l'absence de la mase m dans la relation. Il y a de nombreux problèmes de géométrie ou de physique dans lesquels il est nécessaire d'introduire un paramètre qui ensuite se simplifie au cours des calculs.